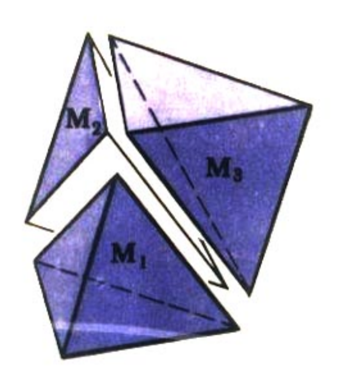
Lecciones populares de matemáticas

FIGURAS EQUIVALENTES Y EQUICOMPUESTAS

V. G. Boltianski



Editorial MIR



Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

V. G. BOLTIANSKI

FIGURAS EQUIVALENTES Y EQUICOMPUESTAS

EDITORIAL «MIR»
MOSCÚ

Traducido al español por
Stanislav N. Beloúsov

на испанском языке

IMPRESO EN LA URSS. 1981

CONTENIDO

PREFACIO

El primer párrafo del libro que se ofrece al lector está dedicado a la demostración del siguiente teorema confeccionado por los matemáticos Bolyai y Gerwien: *si dos polígonos tienen igual área, uno de éstos se puede dividir en tales partes de las cuales es posible componer el segundo polígono.* Hay una formulación más breve: si dos polígonos son *equivalentes*, éstos son *equicompuestos*. El libro entero se dedica al estudio de ciertas cuestiones relacionadas con la equicomposición de figuras y contiene dos capítulos, en el primero de los cuales se estudian los polígonos y en el segundo, los poliedros. El teorema formulado anteriormente es uno de los fundamentales en el primer capítulo.

En el segundo, el más interesante es el teorema de Dehn: existen poliedros que tienen idéntico volumen (son equivalentes), pero no son equicompuestos.

A la demostración de los dos teoremas citados, que ya se hicieron clásicos, está dedicado el libro de Veniamín Fiódorovich Kagán (1869–1953) «Acerca de la transformación de los poliedros». Este pequeño libro escrito vivamente tiene merecida fama. Al mismo tiempo, la demostración del teorema de Dehn en el libro de V. F. Kagán en cierto grado no es elemental: en ella se emplea la noción de la continuidad, las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales, etc.

En últimos tiempos los geómetras suizos recibieron nuevos resultados que profundizan los teoremas de Bolyai–Gerwien y de Dehn. Estos nuevos resultados, así como el hecho de que el libro de V. F. Kagán ya se convirtió en una rareza bibliográfica, indujeron al autor escribir un nuevo libro sobre esta cuestión.

Los teoremas de Bolyai–Gerwien y de Dehn se demuestran en el § 1 y en el § 5, respectivamente. Las demostraciones que se aducen aquí se diferencian de forma considerable de las que contiene el libro de V. F. Kagán. En particular, la demostración del teorema de Dehn difiere por su carácter más elemental y su sencillez.

En los §§ 2...4, 6 se aducen los resultados de los últimos años (éstos pertenecen a Hadwiger, Glur, Sydler; es una excepción el teorema que se da en el § 4 y que, al parecer, es nuevo).

Los primeros tres-cuatro párrafos en el libro son los más fáciles. Para entenderlos se exigen conocimientos del octavo grado

de la escuela secundaria. A la vez, estos párrafos abarcan el círculo único de las cuestiones relacionadas con la medición de las áreas de los polígonos. La exposición del material en los tres primeros párrafos se basa en las conferencias que el autor leyó en la Universidad estatal de Moscú M. V. Lomonósov para los escolares. La siguiente parte del libro según su dificultad es el quinto párrafo y el principio del sexto. Estos exigen conocimientos de casi todo el curso escolar de geometría y capacidad de pensar lógicamente. Por último, la parte restante más difícil del libro (letras menudas) se destina, en lo fundamental, para los estudiantes de los institutos pedagógicos y de las universidades.

El autor considera su agradable deber expresar sincero agradecimiento a I. M. Yaglom por su ayuda amistosa durante la preparación definitiva del manuscrito.

Al trabajar con este libro fueron usados los siguientes materiales:

1. *В. Ф. Каган*, О преобразовании многогранников, ГТТИ, 1933. (*V. F. Kagan*, Acerca de la transformación de los poliedros).
2. *Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов* и *И. М. Яглом*, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. III, стереометрия, «Библиотека математического кружка», вып. 3, Гостехиздат, 1954. (*D. O. Shkliarski, N. N. Chentsov* e *I. M. Yaglom*, Problemas y teoremas seleccionados de la matemática elemental, p. III, estereometría).
3. *H. Hadwiger, P. Glur*, Zerlegungsgleichheit ebener Polygone, Elemente der Mathematik 6 (1951), 97–106.
4. *H. Hadwiger*, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder, Archiv der Mathematik 2 (1949–1950), 441–444.
5. *H. Hadwiger*, Zum Problem der Zerlegungsgleichheit *k*-dimensionaler Polyeder, Mathem. Ann. 127 (1954), 170–174.
6. *H. Hadwiger*, Ergänzungsgleichheit *k*-dimensionaler Polyeder, Mathem. Zeits. 55 (1952), 292–298.
7. *H. Hadwiger*, Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale, Archiv der Mathematik 1 (1948–1949), 468–472.
8. *H. Hadwiger*, Mittelpunktspolyeder und translative Zerlegungsgleichheit. Mathem. Nachr. 8 (1952), 53–58.

Vladimir Boltianski

CAPÍTULO 1

EQUICOMPOSICIÓN DE POLÍGONOS

§ 1. TEOREMA DE BOLYAI–GERWIEN

1. MÉTODO DE DIVISIÓN. Examinemos las dos figuras expuestas en la fig. 1 (todos los segmentos que componen la figura cruciforme son iguales entre sí; el lado del cuadrado es igual al segmento AB). Las líneas de trazos trazadas en el diseño parten dichas figuras en un número idéntico de partes iguales (las partes iguales de ambas figuras están marcadas con cifras). Este hecho se expresa con las

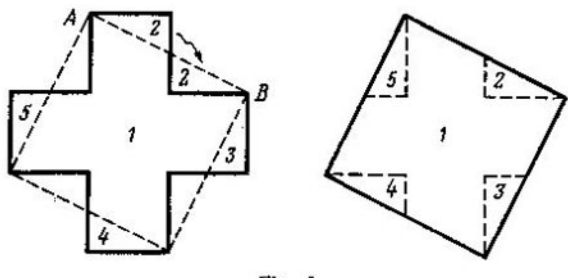


Fig. 1

siguientes palabras: las figuras expuestas en la fig. 1 son *equicompuestas*. Hablando de otra manera, *dos figuras se llaman equicompuestas, si, cortando de cierto modo una de éstas en un número finito de partes, se puede* (al disponer estas partes de otra forma) *componer de ellas una segunda figura.*

Está claro que dos figuras equicompuestas son equivalentes, es decir, tienen igual área. En esto se basa el sencillo procedimiento para calcular las áreas, que se llama método *de división* (o *de partición*). Este método (ya conocido por Euclides, quien vivió hace más de 2000 años) consiste en lo siguiente: para calcular el área se intenta dividir la figura en un número finito de partes, de tal modo que de las mismas se pueda componer una figura *más sencilla* (el área de la cual ya conocemos). Recordemos los ejemplos, para aplicar este método, conocidos del curso escolar de geometría.

En la fig. 2 se da el procedimiento para calcular el área del paralelogramo: éste y el rectángulo que tienen bases idénticas y la misma altura, son equicompuestos y por esto, equivalentes[1]. La figura 3 muestra cómo se puede calcular el área del triángulo: el triángulo tiene la misma área que el paralelogramo con la misma base y la altura dos veces menor (ya que estas dos figuras son equicompuestas). Por último, en la fig. 4 está demostrado el procedimiento para calcular el área del trapecio.

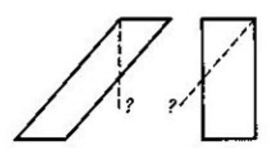
Se puede, naturalmente, examinar también la cuestión acerca de la equicomposición para las figuras curvilíneas (véase, por ejemplo, la fig. 5); sin embargo, aquí no se examinan tales figuras[2]. En este capítulo sólo trataremos los polígonos.

Así pues, dos polígonos equicompuestos cualesquiera son equivalentes. Es natural plantear la cuestión inversa: ¿son equicompuestos cualesquiera dos polígonos, que tienen el área idéntica? Respuesta afirmativa a esta cuestión fue dada (casi simultáneamente) por el matemático húngaro Farkas Bolyai (1832) y el oficial alemán y aficionado a matemática Gerwien (1833). Ahora pasaremos a la demostración de este teorema de Bolyai – Gerwien.

2. TEOREMA DE BOLYAI – GERWIEN. Primeramente demostremos algunas proposiciones auxiliares.

---

[1] Sin embargo, es menester señalar que tan sencillo procedimiento (la separación de un triángulo) no siempre conduce al objetivo. En el caso expuesto en la figura que se demuestra aquí conviene dividir el paralelogramo no en dos, sino que en un número mayor



de partes, para que de éstas pueda componerse un rectángulo con las mismas base y altura (véase a continuación la demostración del lema 3).

[2] El problema acerca de la medición de las áreas de las figuras curvilíneas se reduce (con ayuda del paso límite) al problema de la medida de las áreas de polígonos, es suficiente recordar el cálculo del área del círculo en el curso escolar de geometría. Por eso, limitándonos con el estudio de los polígonos, estamos examinando, sin embargo, cuestiones más fundamentales en principio de la medida de áreas. De modo semejante en el segundo capítulo se estudian sólo los *poliedros*; mientras que la cuestión del cálculo de los volúmenes de tales cuerpos que tienen superficies curvilíneas no se examina.

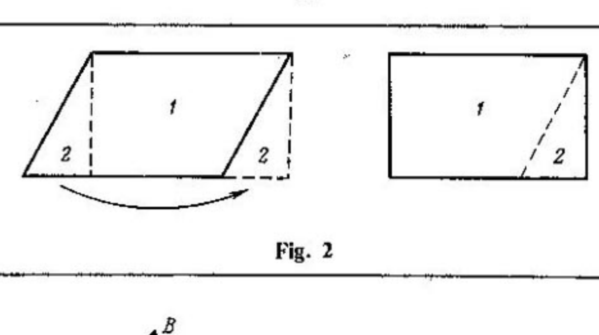


Fig. 2

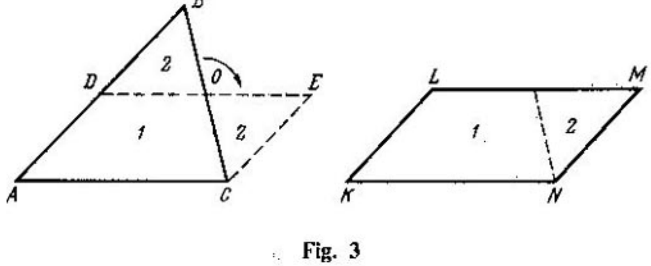


Fig. 3

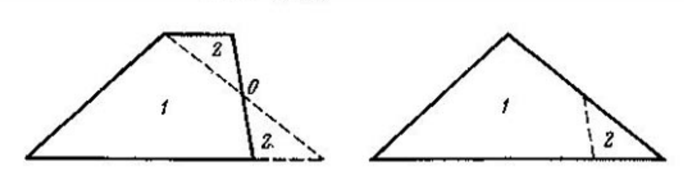


Fig. 4

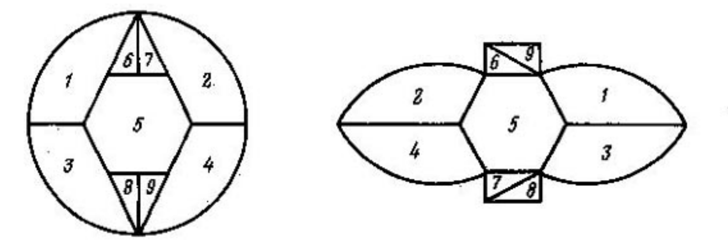


Fig. 5

LEMA 1 *Si la figura A es equicompuesta con la figura B, y la figura B es equicompuesta con la figura C, las figuras A y C también son equicompuestas.*

Efectivamente, tracemos en la figura *B* las líneas que la dividen en tales partes de las cuales se puede componer la figura *A* (líneas llenas en la fig. 6, *a*); tracemos, además, las líneas que

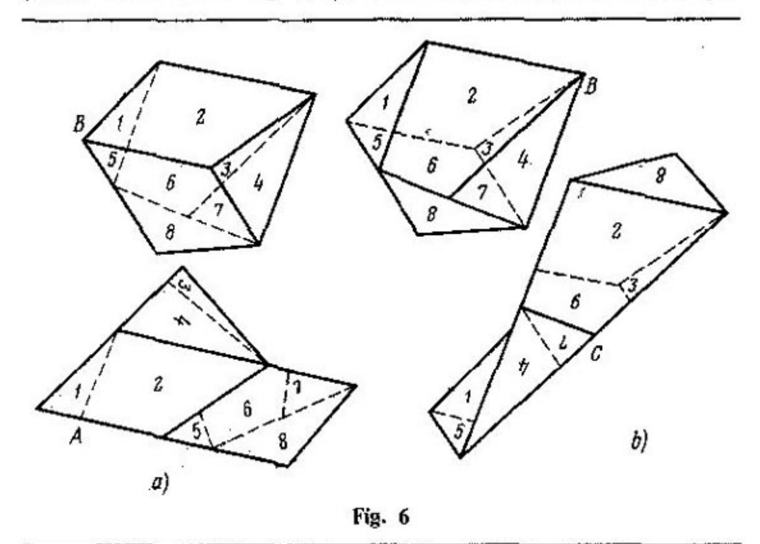


Fig. 6

parten la figura *B* en las partes de las cuales se puede componer la figura *C* (líneas llenas en la fig. 6, *b*). Unas y otras líneas conjuntamente dividen la figura *B* en partes más pequeñas, estando claro, que de estas partes más pequeñas pueden componerse también la figura *A* y la figura *C*. Por lo tanto, las figuras *A* y *C* son equicompuestas.

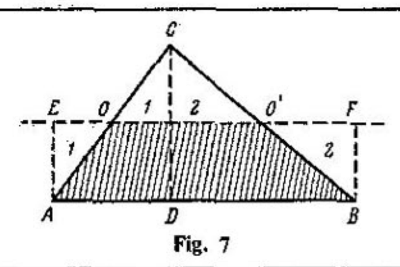


Fig. 7

LEMA 2. *Todo triángulo es equicompuesto con algún rectángulo.*

En efecto, sea AB el lado mayor del triángulo ABC (fig. 7), CD, la altura bajada a este lado. Entonces, el punto D se encuentra entre A y B (de otra manera uno de los ángulos $\angle A$ o bien $\angle B$ sería obtuso y el lado AB no sería el mayor; véase la fig. 8). Por la mitad de la altura CD tracemos una recta paralela a AB y bajemos a esta recta las perpendiculares AE y BF. Entonces, obtenemos el rectángulo $AEFB$ que es equicompuesto con el triángulo ABC. Efectivamente, los triángulos marcados en la fig. 7 con la cifra *1* (así como también los triángulos marcados con la cifra *2*) son iguales. Cada una de las figuras ABC, $AEFB$ consta de un trapecio, rayado en la fig. 7, y de dos triángulos *1*, *2*.

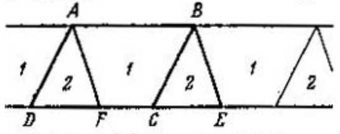
LEMA 3. *Dos paralelogramos que tienen base común e igual área son equicompuestos.*

Sea $ABCD$ y $ABEF$ dos paralelogramos que tienen base común AB e igual área. Entonces, las alturas de esos paralelogramos son idénticas, es decir, los segmentos DC y EF se encuentran en una misma recta. Tracemos en la recta AB consecutivamente una serie de segmentos iguales al segmento AB y por cada punto de división se trazan rectas paralelas a los segmentos AD y AF. Entonces, la franja entre las rectas paralelas AB y DE se parte en una serie de polígonos (fig. 9). Cada uno de estos polígonos, al desplazarlo en un segmento igual a AB coincide con otro polígono que es igual a éste. (¡Demuéstrenlo!). En la fig. 9 los polígonos iguales están marcados con cifras idénticas. Queda por notar que cada uno de los paralelogramos $ABCD$, $ABEF$ contiene una parte marcada con la cifra *1*, una parte marcada con la cifra *2*, con la cifra *3*, etc. Por consiguiente, estos paralelogramos son equicompuestos [1].

LEMA 4. *Dos rectángulos de igual área son equicompuestos.*

Sean $ABCD$ y $EFGH$ dos rectángulos de igual área. De los

[1] Si los paralelogramos $ABCD$, $ABEF$, expuestos en la fig. 9, son tales que los lados AF y BC no se intersecan, entonces, la fig. 9 tomará el aspecto mostrado en la figura adjunta, es decir,



es suficiente separar del paralelogramo $ABCD$ un triángulo, para que de las dos partes obtenidas se pueda componer el paralelogramo $ABEF$ (véase la llamada en la pág. 10).

cuatro segmentos AB, BC, EF, FG elijamos el mayor: sea este, por ejemplo, el segmento AB. Ahora prolonguemos el segmento HG fuera del punto H y en esta recta, con un radio igual a AB, hagamos una raya del punto E (ya que $AB \geqslant EH$, la circunferencia de radio AB con centro en el punto E tendrá con la recta HG un punto común). Al marcar el punto recibido por L, tendremos $AB = EL$ y, trazando el segmento $LK = EF$, construimos el paralelogramo $EFKL$ (fig. 10). Este paralelogramo es equivalente al

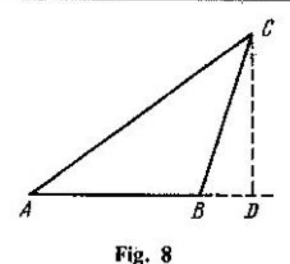


Fig. 8

rectángulo $EFGH$ (y al rectángulo $ABCD$). Del lema 3 se desprende que los paralelogramos $EFGH$ y $EFKL$, los cuales disponen de un lado común EF, son equicompuestos. Pero, los paralelogramos $ABCD$ y $EFKL$ también tienen un lado igual $AB = EL$. Por esto (en virtud del lema 3) ellos son equicompuestos. Por último, ya que el paralelogramo $EFKL$ es equicompuesto con cada uno de los rectángulos $ABCD$ y $EFGH$, entonces (lema 1) estos rectángulos son equicompuestos.

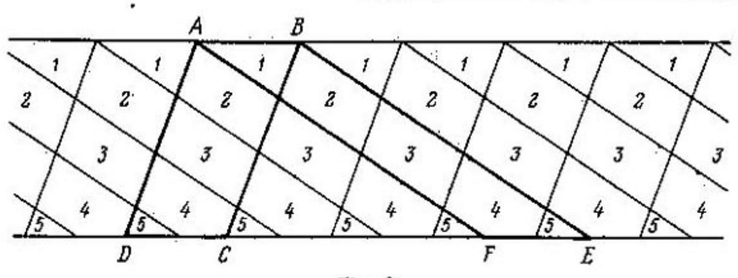


Fig. 9

LEMA 5. *Todo polígono es equicompuesto con cierto rectángulo.*

Todo polígono (indiferentemente, si es convexo o bien no convexo) puede dividirse en un número finito de triángulos. Designémoslos con las cifras *1, 2, 3*, ... (fig. 11). Elijamos, seguidamente, un segmento arbitrario AB y sobre sus extremos levantemos las perpendiculares AC y BD (fig. 12). Tracemos el segmento A_1B_1, paralelo a AB, de tal modo que el área del rectángulo ABB_1A_1 sea igual al área del triángulo *1*. Entonces, el triángulo *1* y el rectángulo ABB_1A_1 (marcado con la cifra *I*) son equicompuestos. En efecto, el triángulo *1* es equicompuesto con cierto rectángulo (lema 2) que, a su vez, es equicompuesto con el rectángulo *I*, el cual tiene la misma área (lema 4); por eso (lema 1) el triángulo *1* y el rectángulo *I* son equicompuestos.

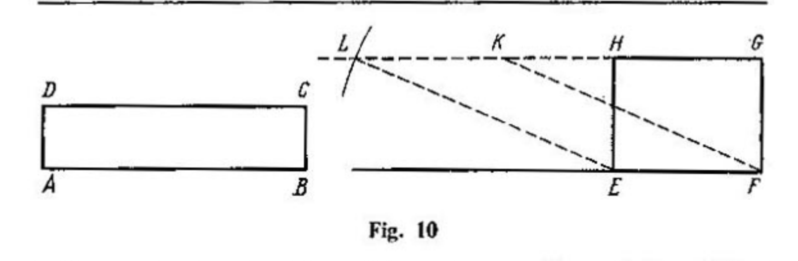


Fig. 10

A continuación, construyamos el segmento A_2B_2, paralelo a AB, de tal manera que el rectángulo $A_1B_1B_2A_2$ marcado con la cifra *II* sea equivalente con el triángulo *2*. Entonces, el triángulo *2* y el rectángulo *II* son equicompuestos. Luego construyamos el rectángulo *III*, que será equicompuesto con el triángulo *3*, etc. Los rectángulos construidos *I, II, III*, ... conjuntamente componen un rectángulo (sombreado en la fig. 12), el cual, según su construcción, es equicompuesto con el polígono inicial.

Ahora es fácil demostrar el teorema citado en la pág. 10.

TEOREMA DE BOLYAI–GERWIEN. *Dos polígonos de iguales áreas son equicompuestos.*

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con el lema 5 cada uno de los polígonos es equicompuesto con cierto rectángulo. Los dos rectángulos obtenidos tienen igual área y, por consiguiente, son equicompuestos (lema 4). De tal guisa (lema 1), los dos polígonos iniciales son equicompuestos.

NOTA. Por «polígono» en el teorema de Bolyai–Gerwien no hay que entender obligatoriamente una parte del plano limitado por

una quebrada cerrada. Este teorema queda también válido para figuras más complicadas limitadas por varias quebradas cerradas (tales figuras se muestran en la fig. 13). En efecto, la única propiedad del «polígono» que hemos empleado anteriormente (véase la demostración del lema 5) es la posibilidad de dividirlo en triángulos. Pero, esta propiedad es también propia de cualquier figura limitada por varias quebradas cerradas (fig. 13).

3. MÉTODO DE ADICIÓN. El método de división a menudo se sustituye por otro procedimiento para calcular las áreas, el cual en cierto sentido es inverso. Este procedimiento, que se llama método *de adición*, lo examinaremos ahora. En lugar de intentar *cortar*

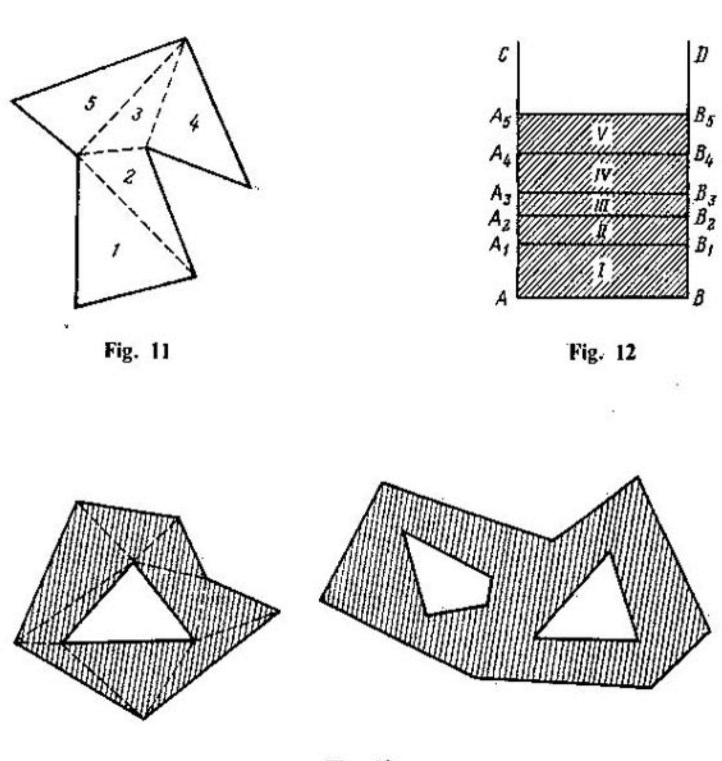


Fig. 11

Fig. 12

Fig. 13

dos figuras en partes iguales, *adicionaremos* ahora dos figuras con partes iguales, de forma que las figuras obtenidas después de tal adición sean iguales. Examinemos de nuevo las figuras representadas en la fig. 1. Estas tienen igual área (en virtud de su equicomposición). Pero, la igualdad de sus áreas puede demostrarse y de otro modo (fig. 14): agregando tanto a la cruz, como al cuadrado cuatro triángulos iguales, obtendremos la misma figura. De ello se deduce que las figuras iniciales (la cruz y el cuadrado) son equivalentes.

El método de adición puede aplicarse con éxito para demostrar los teoremas de geometría elemental. Por ejemplo, para demostrar que el paralelogramo y el rectángulo, con bases y alturas iguales, son equivalentes, es suficiente dirigirse a la fig. 15. En esta figura se ve que tanto el paralelogramo como el rectángulo pueden ser

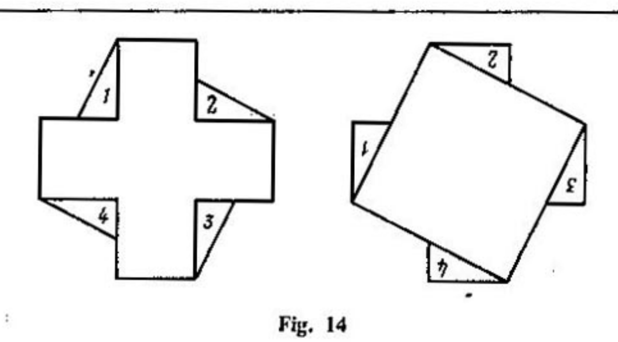


Fig. 14

con ayuda de un solo triángulo completados hasta formar un mismo trapecio. Por esto el paralelogramo y el rectángulo son equivalentes [1].

Con este mismo procediciento es fácil demostrar el teorema de Pitágoras. Sea ABC un triángulo rectángulo. Para demostrar que el área del cuadrado I construido en la hipotenusa es igual

[1] Este procedimiento para calcular el área del paralelogramo es preferible que el empleado habitualmente (fig. 2). En efecto, el procedimiento que se demuestra en la fig. 15 se aplica siempre en distinción del expuesto en la fig. 2 (véase la llamada en la pag. 10).

a la suma de las áreas de los cuadrados *II* y *III* construidos en los catetos (fig. 16), es suficiente dirigirse a la fig. 17. En esta figura se muestra que el cuadrado *I*, tanto como los cuadrados *II* y *III* tomados conjuntamente, pueden ser completados por cuatro triángulos iguales al *ABC* hasta la misma figura, a saber, hasta el cuadrado, el lado del cual es igual a la suma de los catetos. Con ello el teorema de Pitágoras está demostrado. Para compa-

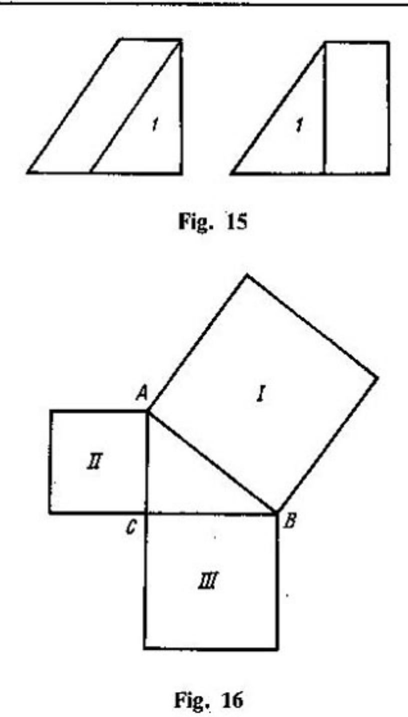
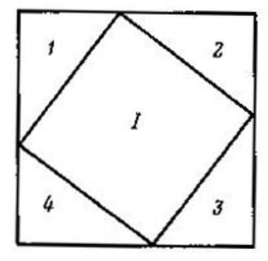


Fig. 15

Fig. 16

rar, conduzcamos la figura[1] a la demostración del teorema de Pitágoras con ayuda del método de división (fig. 18).

[1] Esta figura fue tomada del libro de D. O. Shkliarski y otros (véase la pág. 188) citado en el prefacio.



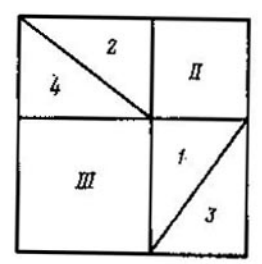


Fig. 17

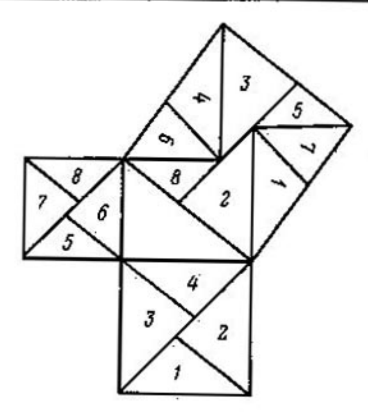
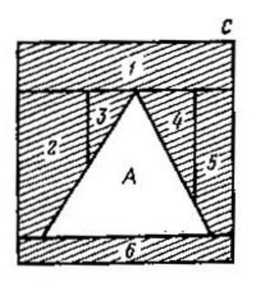


Fig. 18



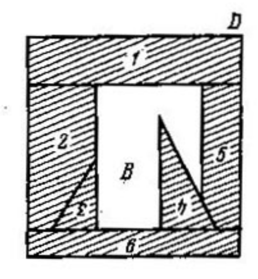


Fig. 19

Acordemos llamar dos polígonos *equiadicionales*, si, aplicando a uno y otro los mismos polígonos, pueden obtenerse dos figuras idénticas. Claro está, que las figuras equiadicionales tienen igual área. Es natural plantear la cuestión inversa: ¿son equiadicionales cualesquiera dos polígonos de igual área? La respuesta afirmativa a esta cuestión es fácil de hallar en el teorema de Bolyai–Gerwien.

TEOREMA. *Dos polígonos de iguales áreas son equiadicionales.*

DEMOSTRACIÓN. Sean A y B dos polígonos de igual área. Elijamos dos cuadrados idénticos de dimensiones tan grandes, que en su interior puedan ubicarse los polígonos A y B. Al cortar de uno de los cuadrados el polígono A y del otro, el polígono B, que tiene la misma área, obtenemos dos figuras equivalentes C y D (rayadas en la fig. 19). De la igualdad de las áreas de las figuras C y D se infiere su equicomposición (en virtud del teorema de Bolyai–Gerwien). Así pues, las figuras C y D pueden ser cortadas en partes iguales de dos en dos. Ello significa la equiadición de los polígonos A y B.

Los teoremas de este capítulo muestran que la *equicomposición* y la *equiadición* significan para los polígonos planos, precisamente, lo mismo que la *equivalencia*. Como veremos en el capítulo II, en el espacio (cuando se examinan los poliedros) el problema es completamente diferente.

§ 2. TEOREMA DE HADWIGER–GLUR

El teorema de Bolyai–Gerwien muestra que los conceptos de equivalencia y de equicomposición para polígonos son idénticos. Este teorema abre una serie de posibilidades para su posterior investigación. En particular, surge una cuestión interesante: ¿es o no posible superponer algunas condiciones adicionales al número o a la disposición de las partes, de las cuales se componen los polígonos equivalentes? Un resultado extraordinario de tal género fue obtenido en 1951 por los matemáticos suizos Hadwiger y Glur. Ellos establecieron que en el teorema de Bolyai–Gerwien se puede exigir complementariamente que las partes, en las cuales está cortado uno de los polígonos equivalentes, y las partes iguales a ellas del segundo polígono, *tengan respectivamente lados paralelos.*

A primera vista, este resultado parece inverosímil: es difícil creer que dos triángulos iguales, girados uno con respecto al otro a un ángulo arbitrario (fig. 20), siempre pueden ser divididos en partes iguales con lados paralelos respectivamente. No obstante, tal división existe no sólo para los triángulos, sino que también para polígonos equivalentes arbitrarios. El presente párrafo está dedicado a la demostración de este hecho.

1. MOVIMIENTOS. Dirijámonos de nuevo a la demostración del teorema de Bolyai—Gerwien, expuesto en el párrafo anterior. Al demostrar el lema 3 (fig. 9), dividimos el paralelogramo $ABCD$ en algunas partes (marcadas con las cifras *1*, *2*, *3*, ...), de las cuales resultó posible componer el paralelogramo $ABEF$. En la fig. 9 se ve que para formar este paralelogramo es suficiente aprovechar la *translación paralela de las partes*, es decir, es suficiente desplazar cada parte a un segmento, sin girarla con ello [1]. En particular, la equicomposición de los dos paralelogramos, que se muestran en la fig. 2, se establece con ayuda de la traslación paralela.

Para establecer la equicomposición de las figuras expuestas en las figs. 3 ó 4, ya no son sólo suficientes las traslaciones paralelas, sin embargo, es fácil mostrar la equicomposición de estas figuras, utilizando, además de las traslaciones paralelas, también

---

[1] Recordemos la definicion de la traslación paralela. Sea PQ un segmento dirigido (vector); su sentido está marcado en la fig. 21 por una punta de saeta. Tomando el punto arbitrario M, tracemos de éste el segmento MM' igual y paralelo al segmento PQ y dirigido al mismo lado; vamos a decir que el punto M' (el extremo de este segmento) se obtiene del punto M con ayuda de la *traslación paralela* sobre el segmento PQ. Al aplicar a todos los puntos de una figura F la traslación paralela sobre el segmento PQ, obtenemos una figura nueva F', de la cual también diremos que ésta se obtiene de la F con ayuda de la *traslación paralela* sobre el segmento PQ. Claro está que para el paso contrario desde la figura F' hacia la F es preciso emplear la traslación paralela al segmento QP, que coincide con el PQ, pero de sentido contrario. Notemos que el paso desde la figura F hacia la misma figura F debe examinarse también como la traslación paralela (la traslación sobre el «segmento nulo»).

las *simetrías centrales*[1]. Efectivamente, al sustituir (con ayuda de la simetría central con respecto al punto O) el triángulo BOD por el triángulo COE (fig. 3), obtenemos el paralelogramo $ADEC$ que, a continuación, con ayuda de la translación paralela, se puede hacer coincidir con el paralelogramo $KLMN$. De modo análogo se demuestra la equicomposición de las figuras expuestas en la fig. 4. Durante la demostración del lema 2 hemos empleado también la simetría central (fig. 7).

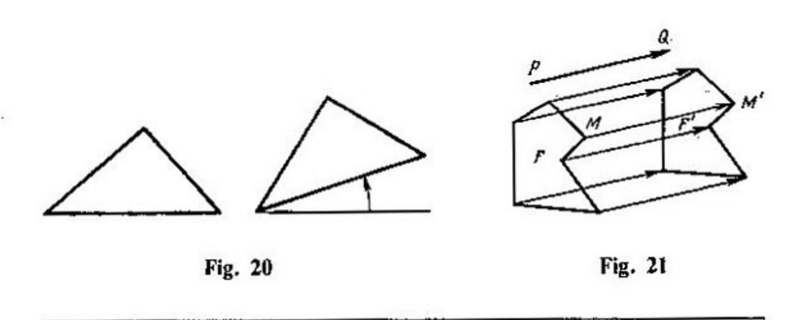


Fig. 20 Fig. 21

Recordemos ahora la demostración del lema 4 (fig. 10). La demostración de la equicomposición de los rectángulos $ABCD$ y $EFGH$ se ha realizado en dos veces: primeramente hemos notado que el rectángulo $EFGH$ es equicompuesto con el paralelogramo $EFKL$, y luego, hemos establecido la equicomposición del último con el rectángulo $ABCD$. La equicomposición de las figuras $EFGH$ y $EFKL$ puede ser establecida sólo con ayuda de las traslaciones paralelas (en virtud del lema 3, ya que los paralelogramos $EFGH$ y $EFKL$ tienen base común). En cuanto a los paralelogramos $ABCD$ y $EFKL$, aunque tienen lados iguales

[1] Recordemos la definición de la simetría central. Sea O cierto punto (centro de simetría). Si AA' es un segmento, el centro del cual se encuentra en el punto O, entonces, sus extremos A y A' se llaman *simétricos* con respecto del centro O. Sustituyendo todos los puntos de alguna figura F por los puntos simétricos centrales a éstos, obtenemos una nueva figura F'. Las figuras F y F' se llaman *simétricas centrales* una de otra (respecto al centro O). El paso desde una de estas figuras hacia la otra se llama *simetría central* (fig. 22).

$AB = EL$, pero están dispuestos así, que éstos no son paralelos y para emplear el lema 3 es necesario, inicialmente, *girar* el paralelogramo $EFKL$, haciendo que el lado EL sea paralelo al lado AB. Por lo tanto, la demostración expuesta anteriormente del lema 4 usa el *giro* de la figura $EFKL$ (vale decir también y de todas las partes,. en las cuales fue partida esta figura) a cierto ángulo.

Nosotros vemos que, en la mayoría de los casos examinados en el primer párrafo, es suficiente, para establecer la equicomposición de las figuras, aprovechar sólo las simetrías centrales y las traslaciones paralelas. Una exceptión constituye el lema 4, para cuya demostración se tuvo que usar el giro de la figura a cierto ángulo. Naturalmente, surge un problema: ¿es o no posible durante la demostración del lema 4 evitar también el uso del giro? ¿Se puede o no, en general, demostrar la equicomposición de cualesquiera dos polígonos equivalentes, sin emplear el giro de las partes componentes, es decir, utilizando simetrías centrales y traslasiones paralelas solamente? Para responder a estas preguntas, tenemos que estudiar algunas propiedades de los *movimientos.*

La traslación paralela, la simetría central, el giro [1] son ejemplos de *movimientos*. El movimiento arbitrario se puede representar del modo siguiente: cierta figura F «se saca» de su plano y se traslada «como un sólido entero» a la nueva posición F'; entonces, el paso desde la figura F hacia la figura F' se llama también *movimiento* [2] (fig. 23). Designaremos los movimientos con letras minúsculas.

Para cada movimiento d existe un *movimiento contrario,* que consiste en que cada figura de su posición nueva, a que ésta se trasladó como resultado del movimiento d, retorna a su lugar anterior. Por ejemplo, para la traslación paralela sobre el segmento

---

[1] La simetría central es un caso privado del giro: para sustituir alguna figura con otra simétrica central, es suficiente girarla en torno del centro de simetría a 180° (fig. 22).

[2] Aquí se trata del movimiento de *una* figura (la figura F). A menudo es más cómodo, hablando del movimiento, tener en cuenta el *movimiento de todo el plano* (con todas las figuras que hay en este plano). Por ejemplo, la «traslación paralela sobre el segmento PQ» puede ser utilizada para cualquier figura en el plano, es decir, ésta representa de por sí el movimiento de *todo el plano*; «simetría central con respecto al centro O» también es el movimiento de todo el plano, etc.

PQ, el movimiento contrario es la traslación paralela sobre el segmento QP (dirigido al lado opuesto). Para la simetría central con respecto al punto O, el movimiento contrario es esta misma simetría. Enunciemos estas afirmaciones como un lema independiente.

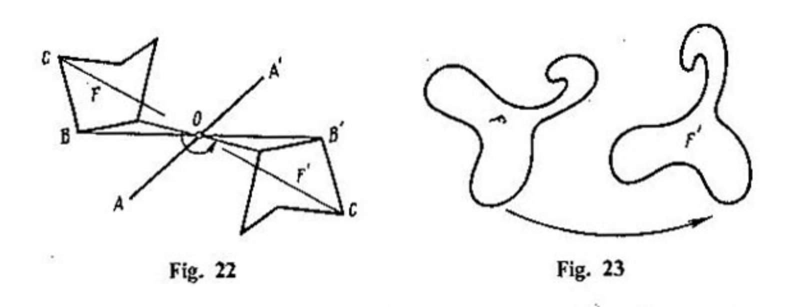


Fig. 22 Fig. 23

LEMA 6. *Si el movimiento d es la traslación paralela o la simetría central, su movimiento contrario también es la traslación paralela o la simetría central.*

Los movimientos pueden ejecutarse uno tras otro. Por ejemplo, podemos, inicialmente, ejecutar la traslación paralela sobre algún segmento (primer movimiento), y luego, la simetría central con respecto de algún punto (segundo movimiento). Si efectuamos, primeramente, el movimiento d_1 y, a continuación, el movimiento d_2, obtendremos, en conclusión, un movimiento nuevo (resultante), el cual designaremos [1] por $d_1 \cdot d_2$; éste se llama *producto* de los movimientos d_1 y d_2.

LEMA 7. *El producto de dos simetrías centrales con centros O_1 y O_2 es la traslación paralela sobre el segmento $2O_1O_2$.*

En efecto, sea A' un punto simétrico al punto A con respecto del punto O_1, y A'', un punto simétrico al punto A' con respecto del punto O_2. Entonces, O_1O_2 es una mediana del triángulo [2]

[1] En ocasiones, es más cómodo designar la ejecución consecutiva de los movimientos d_1 y d_2 no por $d_1 \cdot d_2$, sino por $d_2 \cdot d_1$.

[2] Si el punto A se encuentra en la recta O_1O_2, entonces, los puntos A, A' y A'' se encuentran en una recta, es decir, no forman un triángulo. Sin embargo, los razonamientos quedan correctos también en este caso.

$AA'A''$, es decir, el segmento AA'' es paralelo al segmento O_1O_2, pero tiene doble longitud (fig. 24). Así pues, durante la traslación paralela sobre el segmento $PQ = 2O_1O_2$ el punto arbitrario A pasa al mismo punto A'', al que éste pasa durante la ejecución consecutiva de las simetrías centrales con centros O_1, O_2.

LEMA 8. *El producto de tres simetrías centrales con centros O_1, O_2 y O_3 es una cimetria central.*

Efectivamente, sea O tal punto, que los segmentos O_1O_2 y OO_3 son iguales, paralelos y tienen igual sentido (fig. 25). Entonces, el producto de las simetrías con centros O_1 y O_2 coincide con el producto de las simetrías, que tienen centros O y O_3 (ya que y uno y otro producto es, en vigor del lema 7, la traslación paralela sobre el segmento $2O_1O_2 = 2OO_3$). Por lo tanto, en lugar

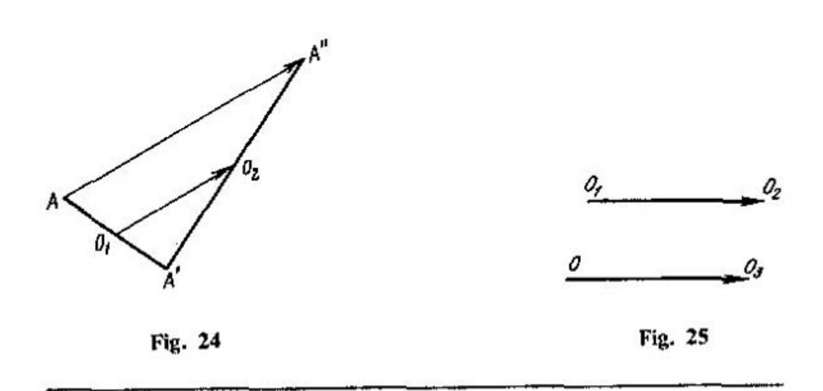


Fig. 24

Fig. 25

de tres simetrías con centros O_1, O_2 y O_3 podemos multiplicar las simetrías con centros O, O_3 y O_3, lo que da, evidentemente, una simetría con respecto al centro O (ya que, como resultado de la ejecución consecutiva de dos simetrías con respecto al mismo centro O_3, cada punto llega al lugar anterior).

LEMA 9. *Si cada uno de dos movimientos d_1 y d_2 es una traslación paralela o simetría central, su producto $d_1 \cdot d_2$ representa de por sí una traslación paralela o simetría central.*

Verdaderamente, ya que la traslación paralela se reduce a dos simetrías centrales (esto se desprende fácilmente del lema 7), entonces, los dos movimientos indicados en el lema se reducen a las dos, tres o cuatro simetrías. Pero dos simetrias nos dan

la traslación paralela (lema 7), tres simetrías se reducen a una (lema 8), mientras que cuatro simetrias pueden reducirse, inicialmente, a dos (ya que las tres – a una), y después, sustituir estas dos simetrías por la traslación paralela. En todos los casos el producto resulta o bien la simetria central, o bien la traslación.

2. TEOREMA DE HADWIGER–GLUR. Digamos que dos polígonos son S-equicompuestos [1], si su equicomposición puede establecerse con ayuda de varias *traslaciones paralelas y simetrías centrales* solamente. Hablando de otro modo, los polígonos son S-equicompuestos, si uno de éstos puede ser dividido en un número finito de partes $M_1, M_2, M_3, \ldots$, y el otro, en el mismo número de partes iguales respectivamente $M'_1, M'_2, M'_3, \ldots$, además, los polígonos M_1 y M'_1 se obtienen uno del otro mediante la traslación paralela o la simetría central; lo mismo es justo para M_2 y M'_2, para M_3 y M'_3, etc.

Pasemos a la demostración del teorema acerca de que *dos polígonos equivalentes siempre son S-equicompuestos*. Su demostración es completamente análoga a la demostración del teorema de Bolyai–Gerwien y se apoya en lemas semejantes.

LEMA Ia. *Si A y C son dos polígonos, cada uno de los cuales es S-equicompuesto con el polígono B, entonces A y C también son S-equicompuestos.*

En efecto, tracemos en la figura B las líneas que dividenla en tales polígonos, de los cuales se puede (con ayuda de traslaciones y simetrías) componer la figura A; además, tracemos las líneas que dividen la figura B en polígonos, de los cuales se puede (con ayuda de traslaciones y simetrías) componer la figura C (fig. 26). Estas y otras líneas conjuntamente dividen la figura B en partes menores, al mismo tiempo está claro que de estas partes menores se puede (con ayuda de traslaciones y simetrías) componer también la figura A y la figura C. Por lo tanto, las figuras A y C resultarán de cierto modo divididas en partes. Designamos las partes, de las cuales está compuesta la figura B, por $M'_1, M'_2, M'_3, \ldots$; las partes correspondientes de la figura A designémoslas por $M_1, M_2, M_3, \ldots$, mientras que las partes correspondientes de la figura C, por $M''_1, M''_2, M''_3, \ldots$ Cada uno de los polígonos M_1 y M''_1 se obtiene de M'_1 con ayuda de la

[1] El sentido de este término se aclara más profundamente en el § 4.

traslación paralela o la simetría central. De aquí se desprende (lema 6) que M'_1 se obtiene de M_1 con ayuda de la traslación paralela o la simetría central, y por esto (lema 9) el polígono M''_1 se obtiene de M_1 con ayuda de la traslación paralela o la simetría central. De modo semejante, el polígono M''_2 se obtiene de M_2 con ayuda de la traslación o la simetría; lo mismo es justo para M_3 y M''_3, etc. Por consiguiente, las figuras A y C son S-equicompuestas.

Señalemos, que *solamente* aquí se emplean las propiedades examinadas anteriormente de las simetrías y las traslaciones (lemas 6 y 9).

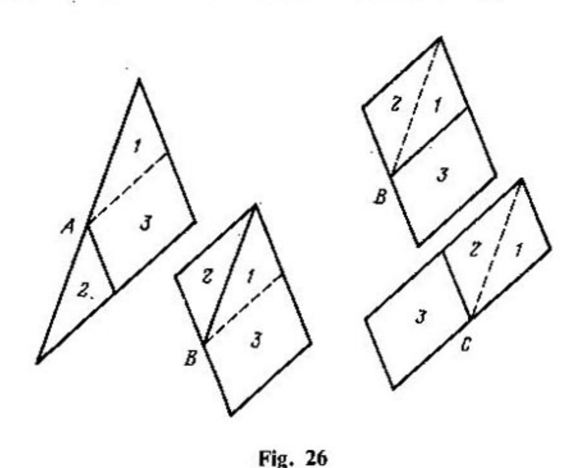


Fig. 26

LEMA 2a. *Todo triángulo es S-equicompuesto con cierto rectángulo.*

Véase la demostración del lema 2 § 1 (pág. 12). Los triángulos marcados en la fig. 7 con la cifra *1* se obtienen uno del otro con ayuda de la simetría respecto al centro O, mientras que los triángulos marcados con la cifra *2*, con ayuda de la simetría respecto al centro O'. Por último, el trapecio rayado en la fig. 7 queda en su lugar, es decir, respecto a éste se aplica la traslación paralela sobre el «segmento nulo». Así pues, las figuras ABC y $ABFE$, que se muestran en la fig. 7, son S-equicompuestas.

LEMA 3a. *Dos paralelogramos equivalentes con bases iguales y paralelas son S-equicompuestos.*

Efectivamente, con ayuda de la traslación paralela se puede hacer coincidir las bases iguales de los paralelogramos, a continuación, queda por repetir la demostración del lema 3 § 1 (pág. 13): las partes, marcadas en la fig. 9 con cifras idénticas, se obtienen una de la otra con ayuda de traslaciones paralelas.

LEMA 4a. *Dos rectángulos de iguales áreas son S-equicompuestos.*

La demostración del lema 4 § 1 aquí no sirve, ya que en ésta se utiliza el giro (véase la pág. 23). Por esto, examinemos otra demostración.

Sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ dos rectángulos equivalentes. Construyamos el paralelogramo AB_1C_1D, que es equivalente a los dos rectángulos y que tiene un lado AD común con el rectángulo $ABCD$ y otro lado AB_1 paralelo a uno de los lados del rectángulo $A'B'C'D'$ (fig. 27, *a*). Entonces, los paralelogramos $ABCD$ y AB_1C_1D son S-equicompuestos (lema 3a). Luego, construyamos el rectángulo $AB_1C_2D_1$, que es equivalente a los rectángulos iniciales y tiene un lado AB_1 común con el paralelogramo AB_1C_1D. En este caso las figuras AB_1C_1D y $AB_1C_2D_1$ son S-equicompuestos (fig. 27, *b*). Con ello, los lados de los rectángulos $AB_1C_2D_1$ y $A'B'C'D'$ son

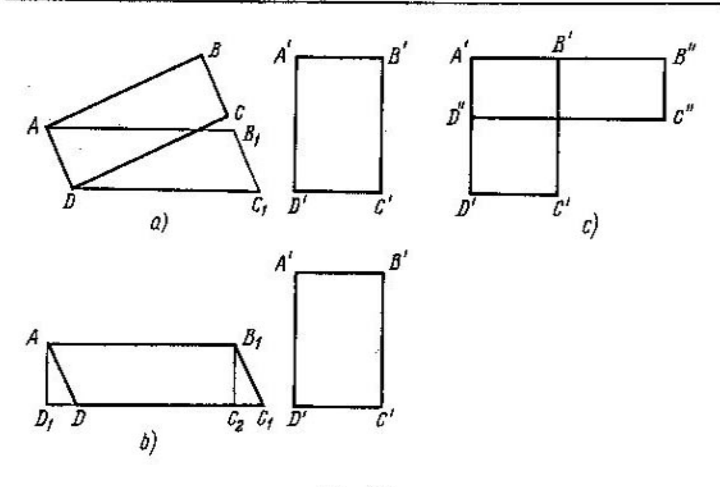


Fig. 27

paralelos respectivamente. Por fin, con ayuda de la traslación paralela superponemos el rectángulo $AB_1C_2D_1$ en $A'B'C'D'$ de manera que el punto A coincida con el A', mientras que el lado AD_1 se dirija por $A'D'$. Obtenemos el rectángulo $A'B''C''D''$ que tiene con el rectángulo $A'B'C'D'$ un ángulo común A' (fig. 27, c). Dado que durante esta construcción cada vez pasamos de un paralelogramo a otro, que es S-equicompuesto con el primero,

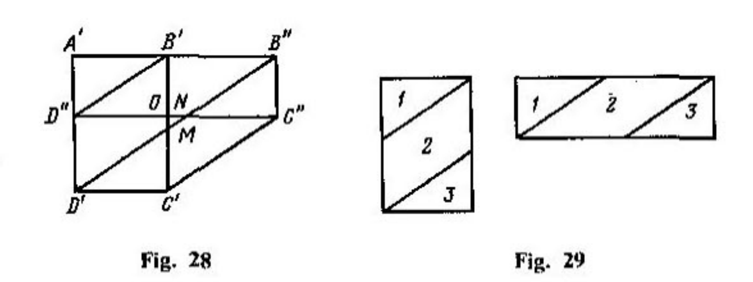


Fig. 28 Fig. 29

en vigor del lema 1a, obtenemos el rectángulo $A'B''C''D''$, que es S-equicompuesto con el rectángulo inicial $ABCD$. Queda por demostrar la S-equicomposición del rectángulo obtenido $A'B''C''D''$ con el rectángulo $A'B'C'D'$. Consideraremos con ello, para precisar, que $A'B'' > A'B'$ (y por esto $A'D'' < A'D'$). Tracemos los segmentos $B''D'$, $B'D''$, $C'C''$ y mostremos que éstos son paralelos (fig. 28). Verdaderamente, de la igualdad de las áreas obtenemos:

$$A'B' \cdot A'D' = A'B'' \cdot A'D'', \tag{1}$$

de donde, sustrayendo de los dos miembros de la igualdad el producto $A'D'' \cdot A'B'$, obtenemos:

$$A'B' \cdot D'D'' = A'D'' \cdot B'B''$$

o bien

$$A'B' \cdot OC' = A'D'' \cdot OC''. \tag{2}$$

Al anotar las igualdades (1) y (2) como proporciones, obtenemos:

$$A'B' : A'D'' = A'B'' : A'D' = OC'' : OC'.$$

De tal guisa, los triángulos rectángulos $A'B'D''$, $A'B''D'$ y $OC'C''$ son semejantes. De aquí se deriva que $\angle\, A'D''B' = \angle\, A'D'B'' =$

$= \angle B'C'C''$, y por eso, los segmentos $B''D'$, $B'D''$ y $C'C''$ son paralelos.

Designemos los puntos de intersección del segmento $B''D'$ con los segmentos $B'C'$ y $C''D''$ por M y N. Con ello $\triangle B''C''N = \triangle MC'D'$ ($B''C'' = MC'$ y $C''N = C'D'$, ya que $B''C''C'M$ y $NC''C'D'$ son paralelogramos). Seguidamente, los paralelogramos $B'B''ND''$ y $B'MD'D''$ son equivalentes y tienen una base común $B'D''$, de esta manera, en vigor del lema 3a, éstos son S-equicompuestos. Finalmente, el triángulo $A'B'D''$ pertenece a los dos rectángulos $A'B'C'D'$ y $A'B''C''D''$. Así pues, de la partición obtenida de cada uno de estos rectángulos en tres partes (fig. 29), llegamos a la conclusión de que éstos son S-equicompuestos (las partes marcadas con las cifras *1* y *3* son iguales, respectivamente, y se obtienen una de la otra con ayuda de la traslación paralela, mientras que los paralelogramos marcados con la cifra *2*, son S-equicompuestos).

LEMA 5a. *Todo polígono es S-equicompuesto con cierto rectángulo.*

TEOREMA DE HADWIGER – GLUR. *Dos polígonos de iguales áreas son S-equicompuestos.*

Las demostraciones del lema 5a y del teorema de Hadwiger – Glur se obtienen mediante la repetición textual de las demostraciones del lema 5 y el teorema de Bolyai – Gerwien con la sola diferencia que en lugar de «equicompuestos» se ha de decir «S-equicompuestos», y en lugar de las referencias a los lemas 1, 2, ... hay que tener en cuenta las citas a los lemas 1a, 2a, ...

Del teorema demostrado de Hadwiger – Glur se infiere directamente que los polígonos equivalentes pueden ser divididos en partes de lados paralelos respectivamente (véase el comienzo de este párrafo). En efecto, si A y B son polígonos equivalentes, entonces, uno de éstos se puede partir en tales partes, de las cuales se puede, empleando solamente las traslaciones paralelas y las simetrías centrales, componer un segundo polígono. Queda por señalar que si dos polígonos se obtienen uno del otro con ayuda de la traslación paralela (fig. 21) o la simetría central (fig. 22), sus lados son paralelos respectivamente.

§ 3. EQUICOMPOSICIÓN Y NOCIÓN DEL INVARIANTE ADITIVO

Después de la demostración del teorema de Hadwiger–Glur, naturalmente, surge la cuestión: ¿es o no posible dividir cualesquiera dos polígonos equivalentes en partes que se obtienen una de la otra sólo con ayuda de *traslaciones paralelas*? Con otras palabras: ¿es o no excesivo el empleo de las simetrías en el párrafo anterior? Al examen de dicha cuestión se dedica el presente párrafo. Veremos que *no todos* dos polígonos de igual área pueden ser divididos en partes que se obtienen una de la otra con ayuda de traslaciones paralelas; en particular, el triángulo y el paralelogramo equivalente a éste no permiten tal división en partes.

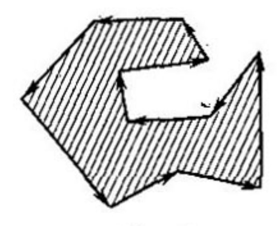


Fig. 30

Para establecer estos hechos se utilizará la noción del *invariante aditivo*, que se determina en adelante. Esta noción encontrará su empleo también en los párrafos ulteriores.

1. INVARIANTE ADITIVO $J_1(M)$. Sea M un polígono arbitrario. En cada uno de sus lados marquemos mediante una flecha tal dirección que, avanzando por este lado en la dirección indicada, veremos cerca de este lado, *a la izquierda*, los puntos, que pertenecen al polígono examinado, mientras que a la derecha, los puntos, que no pertenecen a éste [1] (fig. 30). Elijamos, a continua-

[1] Si recorremos uno por uno los lados del polígono, avanzando en las direcciones indicadas mediante las flechas, recorreremos todo el contorno del polígono y volveremos al punto inicial. En este caso se dice, que hemos efectuado el *recorrido* del contorno del polígono *en sentido antihorario*.

ción, cierta *recta dirigida* l, es decir, una recta, en la cual la dirección está marcada mediante una flecha. Designemos por $J_l(M)$ la suma algebraica de las longitudes de todos los lados del polígono M, paralelos a la recta l, además, tomemos los lados dirigidos *igual* que la recta l (lados AB, DE y FG en la fig. 31) con el signo $+$, mientras que los lados de la dirección *contraria* (lado KL en la fig. 31), con el signo $-$. Si el polígono M no tiene lados paralelos a la recta l, el número $J_l(M)$ se considera igual a cero. El número $J_l(M)$ lo llamaremos *invariante aditivo* (la causa de tal denominación se esclarece a continuación).

La importancia del invariante $J_l(M)$ para el problema acerca de la equicomposición de los polígonos se aclara del teorema, a cuya enunciación pasamos.

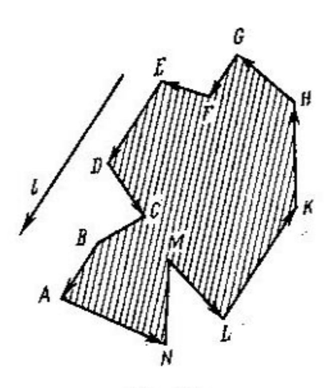


Fig. 31

2. T-EQUICOMPOSICIÓN Llamaremos dos polígonos *T-equicompuestos*, si su equicomposición puede ser establecida *sólo con ayuda de las traslaciones paralelas* (compárese la pág. 26).

TEOREMA. *Sean A y A' dos polígonos, y l, una recta dirigida. Si $J_l(A) \neq J_l(A')$, los polígonos A y A' no son T-equicompuestos.*

La demostración de este teorema será examinado más adelante, pero ahora señalemos un simple corolario, que se desprende de éste. Sea $\triangle$ un triángulo, y P un paralelogramo equivalente a éste (la base del paralelogramo es paralelo a la base del triángulo,

fig. 32). Elijamos una recta l paralela a las bases del triángulo y del paralelogramo y determinemos los signos de los lados en concordancia con la regla indicada anteriormente (fig. 32). Con ello encontraremos: $J_l(P) = 0$, $J_l(\triangle) \neq 0$, de esta manera $J_l(P) \neq \neq J_l(\triangle)$, y por eso, las figuras P y $\triangle$ no son T-equicompuestas. No son tampoco T-equicompuestos los triángulos iguales, que se muestran en la fig. 33.

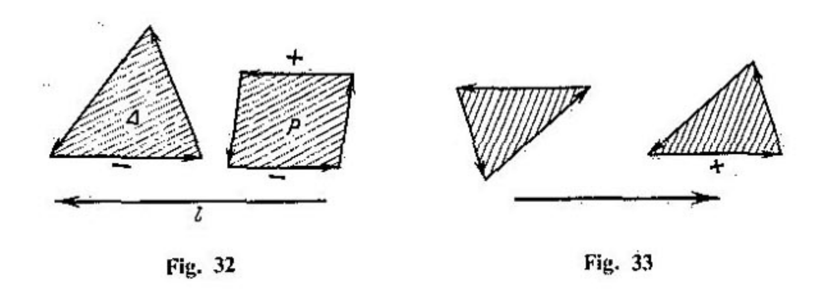


Fig. 32 Fig. 33

Pasemos a la demostración del teorema enunciado aquí.

3 PROPIEDADES DEL INVARIANTE $J_l(M)$.

LEMA 10. *Sea l una recta dirigida, mientras que M y M', dos polígonos que se obtienen uno del otro con ayuda de la traslación paralela. Entonces, $J_l(M) = J_l(M')$.*

Con otras palabras, el número J_l *no varía* durante la traslación paralela; de aquí viene la denominación *invariante*, es decir, *invariable*.

La afirmación de este lema es evidente (durante la traslación paralela del polígono las longitudes de sus lados y sus direcciones no cambian).

LEMA 11. *Sea l una recta dirigida, mientras que A, cierto polígono dividido en un número finito de polígonos $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Entonces,*

$$J_l(A) = J_l(M_1) + J_l(M_2) + \ldots + J_l(M_k). \qquad (3)$$

Hablando de otro modo, si el polígono A se compone de ciertos polígonos menores, su invariante se obtiene de los invariantes de éstos polígonos componentes mediante la adición; de aquí viene la denominación el invariante *aditivo* (de la palabra *adición*).

DEMOSTRACIÓN. Examinemos todos los segmentos que son los lados de los polígonos A, M_1, M_2, ..., M_k. Marquemos en estos segmentos todos los puntos que representan los vértices de los polígonos A, M_1, M_2, ..., M_k. Entonces, obtendremos un número finito de segmentos menores que llamaremos *eslabones*. Cada lado de cada uno de los polígonos A, M_1, M_2, ..., M_k consta de uno o varios eslabones. En la fig. 34 se muestra la división del polígono en partes menores. El lado AB consta de tres eslabones AM, MN y NB; de tres eslabones consta también el lado NP del polígono rayado en el diseño.

Indiquemos, que para calcular el invariante $J_l(A)$ del polígono A (o bien de cualesquiera de los polígonos M_1, M_2, ..., M_k) se

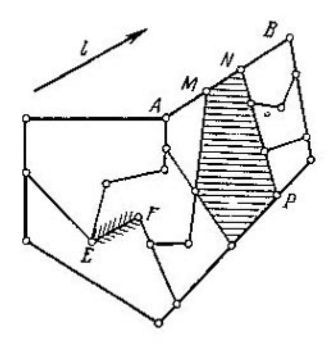


Fig. 34

puede tomar la suma algebraica no de los lados, sino de los *eslabones* paralelos a la recta l, ya que la longitud de cada lado es igual a la suma de las longitudes que lo componen. Por esta razón, para calcular la suma en el segundo miembro de la proporción (3) es necesario componer la suma algebraica de las longitudes de todos los eslabones paralelos a la recta l, además, hay que tomar en consideración estos eslabones por todos los polígonos M_1, M_2, ..., M_k.

Examinemos cierto eslabón que está ubicado enteramente (salvo, puede ser, los extremos) *dentro* del polígono A (eslabón EF en la fig. 34). Entonces, con él lindan *dos* polígonos de los

polígonos $M_1, M_2, \ldots, M_k$, además, éstos son limítrofes al eslabón por lados *diferentes* (uno – a la derecha, otro – a la izquierda). Por este motivo, al calcular el invariante de un polígono, el eslabón examinado entra con un signo, mientras que, al calcular el invariante de otro polígono, con signo opuesto, y en la suma algebraica total de eslabones estos dos miembros se anulan mutuamente. Nosotros vemos que, al calcular el segundo miembro de la proporción (3), se puede no tomar en consideración absolutamente los eslabones dispuestos *dentro* del polígono A.

Examinemos ahora cierto eslábon ubicado en el contorno del polígono A y paralelo a la recta l (eslabón AM en la fig. 34). Con éste linda sólo *uno* de los polígonos $M_1, M_2, \ldots, M_k$, además, por el *mismo lado* con que el polígono A linda al eslabón examinado. Por consiguiente, este eslabón entrará en la suma $J_l(M_1) + J_l(M_2) + \ldots + J_l(M_k)$ con el mismo signo que en el invariante $J_l(A)$.

Así pues, el segundo miembro de la relación (3) es igual a $J_l(A)$, es decir, la fórmula (3) es válida.

Ahora ya es fácil demostrar el teorema enunciado en la pág. 32. Efectivamente, sea $J_l(A) \neq J_l(A')$, con ello también (contrariamente a la afirmación del teorema) los polígonos A y A' son T-equicompuestos. Esto significa que A puede ser compuesto de tales polígonos $M_1, M_2, \ldots, M_k$, mientras que B, de tales polígonos $M'_1, M'_2, \ldots, M'_k$, que M_1 y M'_1 se obtienen uno del otro con ayuda de la traslación paralela; lo mismo es justo para M_2 y M'_2, etc. Entonces, de acuerdo con el lema 10, obtenemos:

$$J_l(M_1) = J_l(M'_1),\ J_l(M_2) = J_l(M'_2),\ \ldots,\ J_l(M_k) = J_l(M'_k), \quad (4)$$

y de acuerdo al lema 11

$$\left.\begin{aligned} J_l(A) &= J_l(M_1) + J_l(M_2) + \ldots + J_l(M_k), \\ J_l(A') &= J_l(M'_1) + J_l(M'_2) + \ldots + J_l(M'_k). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

De (4) y (5) se deduce que $J_l(A) = J_l(A')$, lo que contradice a la condición. De este modo, al cumplirse la desigualdad $J_l(A) \neq J_l(A')$, los polígonos no pueden ser T-equicompuestos.

4. POLÍGONOS DE SIMETRÍA CENTRAL. El teorema, cuya demostración fue expuesta anteriormente, se puede enunciar también de la manera siguiente: dos polígonos A y A' pueden ser T-equicompuestos *solamente en el caso*, cuando para *cualquiera* recta l tiene lugar la igualdad $J_l(A) = J_l(A')$. Hablando de otro modo, para la T-equicomposición de los polígonos A y A' *es preciso* el cumpli-

miento de la igualdad $J_l(A) = J_l(A')$. Se puede demostrar que esta condición también es *suficiente*, es decir, que tiene lugar la siguiente proposición [1].

TEOREMA *Si los polígonos equivalentes A y A' son tales que para toda recta dirigida l tiene lugar la igualdad $J_l(A) = J_l(A')$, entonces los polígonos A y A' son T-equicompuestos.*

Planteemos ahora el siguiente problema: hallar todos los polígonos *convexos* que son T-equicompuestos con el cuadrado. Es fácil de ver, que para el cuadrado Q el invariante $J_l(Q)$ es igual a cero con cualquiera recta l (el caso, cuando la recta l es paralela a uno de los lados del cuadrado, se ilustra en la fig. 35;

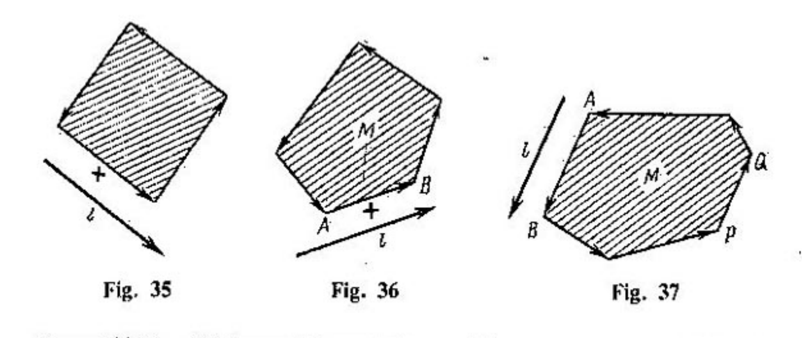


Fig. 35 Fig. 36 Fig. 37

pero, si la recta l no es paralela a ningún lado del cuadrado, entonces, $J_l(Q) = 0$ en vigor de la determinación del número $J_l(Q)$). Por esta razón, nuestro problema puede ser enunciado del modo siguiente: hallar todos los polígonos convexos, cuyo invariante J_l es igual a cero para cualquiera recta l. Sea M un polígono que tiene esta propiedad, AB, uno de sus lados, mientras que l, una recta paralela a AB. En este caso el polígono M debe tener también un lado paralelo a AB (ya que de otro modo sería $J_l(M) = AB > 0$, véase la fig. 36). Si este lado [2] paralelo a la recta AB lo designamos por PQ, obtendremos (fig. 37) $J_l(M) = AB - PQ$, y ya que el

[1] La demostración se encuentra en una obra colectiva de Hadwiger y Glur citada en el prefacio.

[2] Ya que el polígono M es convexo, éste no puede tener más de dos lados paralelos a la recta l.

número $J_l(M)$ debe ser igual a cero, $AB = PQ$. Así pues, para cada lado del polígono M hay otro lado («opuesto») igual y paralelo a éste, de donde se deriva fácilmente, que el polígono M es de *simetría central*. Está claro también lo contrario: si el polígono M es de simetría central, para *toda* recta l el invariante $J_l(M)$ es igual a cero. Por lo tanto, para la *T-equicomposición del polígono convexo con el cuadrado es necesario y suficiente que este polígono sea de simetría central.*

Hemos obtenido este resultado, basándonos en el teorema anteriormente enunciado (pero no demostrado). Sin embargo, guiándose por la fig. 38, el lector demostrará fácilmente (sin

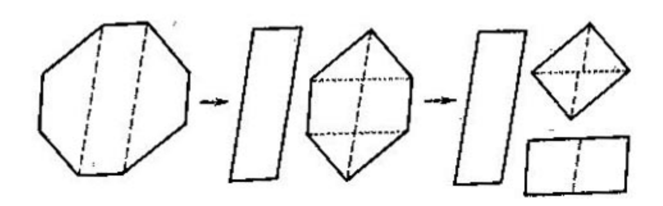


Fig. 38

aprovechar este teorema) que el polígono de simetría central puede ser convertido (al dividirlo en partes y empleando las traslaciones paralelas) en varios paralelogramos, y, luego (véase la demostración del lema 3), en un cuadrado.

§ 4. EQUICOMPOSICIÓN Y NOCIÓN DE GRUPO

En el § 2 hemos hablado de los *movimientos* del plano. Designemos por D todo el conjunto de movimientos; cada movimiento independiente lo llamaremos *elemento* de dicho *conjunto D*. Por ejemplo, cada traslación paralela (o cada simetría central) es un elemento del conjunto D. Para cada dos movimientos está determinado su *producto*, es decir, el conjunto D posee las siguientes propiedades.

PROPIEDAD 1. *Para cada uno de dos elementos d_1, d_2 del conjunto D está determinado su producto $d_1 \cdot d_2$, que también es un elemento de este mismo conjunto D.*

Entre los movimientos hay uno que desempeña un papel particular. Este es un movimiento que deja todas las figuras en su propio lugar, el movimiento que consiste en que, si se puede decir así, «falta todo movimiento». Nosotros designaremos este movimiento por la letra e y lo llamaremos *movimiento idéntico.* Este posee tal propiedad, que para todo movimiento d los productos $d \cdot e$ y $e \cdot d$ coinciden con d:

$$d \cdot e = e \cdot d = d.$$

En efecto, si, primeramente, aplicamos e (dejamos todas las figuras en su lugar) y, después, aplicamos d, esto, justamente, significa que hemos ejecutado el movimiento d, es decir, $e \cdot d = d$. Del mismo modo está claro que $d \cdot e = d$. Esto nos recuerda las propiedades del número 1 durante la multiplicación ($a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo número a). Por esta razón, el movimiento e se llama también *unidad.* Así pues,

PROPIEDAD 2. *En el conjunto D hay tal elemento e, llamado unidad, que para todo elemento d del D se cumplen las correlaciones*

$$d \cdot e = e \cdot d = d. \tag{6}$$

A continuación para cada movimiento d existe un movimiento *inverso* que se designa por d^{-1}. El producto del movimiento d y del inverso a éste d^{-1} (así mismo como el producto del movimiento d^{-1} y el movimiento d) es un movimiento que deja todas las figuras en su lugar anterior, es decir,

$$d \cdot d^{-1} = d^{-1} \cdot d = e.$$

Por consiguiente, obtenemos la

PROPIEDAD 3. *Para cada elemento d del conjunto D hay un elemento d^{-1}, que pertenece a este mismo conjunto y que se llama inverso para el elemento d, para el cual se cumplen las correlaciones*

$$d \cdot d^{-1} = d^{-1} \cdot d = e. \tag{7}$$

Ahora sean d_1, d_2 y d_3 tres movimientos. Supongamos que cierta figura A se traslada mediante el movimiento d_1 a la figura B, ésta se traslada mediante el movimiento d_2 a la figura C, mientras que ésta se traslada mediante el movimiento d_3 a la figura D. Examinemos el producto $(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3$ que consiste en que los movimientos d_1 y d_2 se multiplican entre sí y el producto obtenido

se multiplica por d_3. El movimiento $d_1 \cdot d_2$ traslada, como es fácil de ver, la figura A a la C, mientras que el movimiento d_3 traslada la figura C a la D. Por este motivo, el movimiento $(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3$ traslada en seguida la figura A a la D. Si efectuamos la multiplicación en otro orden: $d_1 \cdot (d_2 \cdot d_3)$, entonces hallaremos que la figura A se traslada mediante el movimiento d_1 a la figura B, la cual por el movimiento $d_2 \cdot d_3$ también se traslada a la D. Así pues, ambos movimientos $(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3$ y $d_1 \cdot (d_2 \cdot d_3)$ trasladan cada figura A a la misma figura, es decir, estos movimientos simplemente coinciden.

De tal guisa, tiene lugar la

PROPIEDAD 4. *Para cualesquiera tres elementos d_1, d_2 y d_3 del conjunto D se cumple la correlación*

$$(d_1 \cdot d_2) \cdot d_3 = d_1 \cdot (d_2 \cdot d_3), \tag{8}$$

que se llama condición de asociatividad.

Así pues, el conjunto D de todos los movimientos posee las propiedades enumeradas 1–4.

Llámase grupo[1] *todo conjunto que consta de cualesquiera elementos y que posee las propiedades* 1–4.

Como hemos visto, el conjunto D de todos los movimientos del plano es un grupo. Examinemos ahora el conjunto S, *que se compone de todas las traslaciones paralelas y las simetrías centrales*, y mostremos que éste también es un grupo. En efecto, los elementos del conjunto S son movimientos; para cada dos de éstos (como también para dos movimientos arbitrarios) está

[1] Examinaremos aquí solamente los *grupos de movimientos* (véase a continuación). Como ejemplo de grupo, cuyos elementos no son movimientos, se puede indicar el conjunto G *de todos los números positivos* (la unidad es el número 1; el producto tiene el sentido habitual; el número inverso para el número a es $1/a = a^{-1}$). Podríase aducir aún una serie de ejemplos de grupos.

La noción de grupo desempeña un gran papel en la matemática moderna. A los interasados puede ser recomendado el libro de P. S. Alexándrov, «Introducción a la teoría de grupos» («Uchpedguiz», Moscú, 1953, en ruso), que está escrito de modo elemental y contiene un gran número de ejemplos interesantes. Sobre el empleo de la noción de grupo en geometría véase la segunda parte del libro de I. M. Yaglom, «Transformaciones geométricas» «Gostejizdat», 1956, en ruso). Indiquemos que en los libros de P. S. Alexándrov e I. M. Yaglom la operación en el grupo no se llama multiplicación, sino *adición*.

determinado el *producto*, además, de acuerdo con el lema 9 éste también es un elemento del conjunto S. Por lo tanto, la propiedad 1 está cumplida. La propiedad 2 también, evidentemente, está cumplida, ya que el movimiento e es la traslación (es decir, pertenece al conjunto S), mientras que la correlación (6) tiene lugar en general para *todos* los movimientos (y, en particular, para las traslaciones y simetrías, es decir, para los elementos del conjunto S). La propiedad 3 está cumplida, porque para las traslaciones y simetrías los movimientos inversos de nuevo son las traslaciones y simetrías (lema 6), y la correlación (7), válida para todos los movimientos, está cumplida, en particular, para los elementos del conjunto S. Finalmente, la condición de asociatividad (8), que tiene lugar para *todos* los movimientos, también es válida para las traslaciones y simetrías. Por lo tanto, el conjunto S es un grupo.

Asimismo se puede mostrar, que el conjunto T *compuesto por todas las traslaciones paralelas*, es un grupo.

Cierto conjunto G se llama *grupo de movimientos*, si sus elementos son movimientos (por lo tanto está claro en qué sentido se puede multiplicar éstos elementos) y se cumplen las propiedades $1-4$ (es decir, G es un grupo). Los grupos D, S y T examinados anteriormente pueden servir de ejemplo de grupos. En calidad de un nuevo ejemplo de grupo de movimientos se puede señalar el grupo O_n que consta de los giros en torno de un mismo punto a uno de los ángulos $0, 2\pi/n, 4\pi/n, 6\pi/n, \ldots, (2n-2)\pi/n$ (el giro al ángulo 0 es el movimiento idéntico e). Ofrecemos al lector cerciorarse de que O_n es un grupo. Indiquemos solamente que, como lo muestra este ejemplo, el grupo puede estar compuesto de un *número finito* de elementos (en el grupo O_n hay n elementos).

Sea G cierto grupo de movimientos, mientras que A y A', dos polígonos. Supongamos que hemos logrado dividir el polígono A en tales partes $M_1, M_2, \ldots, M_k$, y el polígono A', en tales partes $M'_1, M'_2, \ldots, M'_k$, las cuales se obtienen una de la otra con ayuda de movimientos que *pertenecen al grupo* G (es decir, en el grupo G hay cierto movimiento g_1, que traslada el polígono M_1 al M'_1, otro movimiento g_2, que traslada M_2 al M'_2, etc.). Con ello los polígonos A y A' se llaman *G-equicompuestos*. Si en calidad de grupo G se examinan los grupos S o T, obtenemos las nociones de S-equicomposición o T-equicomposición, examinadas anteriormente. Todos dos polígonos de igual área son D-equicompuestos (teorema de Bolyai–Gerwien) e incluso, S-equicompuestos (teorema de Hadwiger–Glur). Sin embargo, existen polígonos (por ejemplo,

triángulo y paralelogramo) que tienen igual área, pero que no son T-equicompuestos.

En resumen señalemos el siguiente teorema, que contesta a la cuestión que, posiblemente, ya se plantearon los lectores.

TEOREMA *El grupo S es el menor grupo de movimientos, que permite establecer la equicomposición de cualesquiera polígonos equivalentes. Hablando de otro modo, si G es tal grupo de movimientos, que todos dos polígonos equivalentes son G-equicompuestos, el grupo G contiene todo el grupo S (es decir, contiene todas las traslaciones paralelas y todas las simetrías centrales).*

La *demostración* se apoya sobre algunos lemas; al enunciar éstos, supongamos que G es un grupo que satisface las condiciones del teorema.

LEMA 12. *Si P y Q son dos puntos arbitrarios del plano, entonces en el grupo G existe un movimiento que traslada P a Q* (esta propiedad del grupo de movimientos se llama la *transitividad*).

Supongamos lo contrario: existen tales dos puntos P y Q, que ningún movimiento perteneciente al grupo G no traslada el punto P al Q. Aquellos puntos, a los cuales el punto P puede ser trasladado mediante movimientos, que pertenecen al grupo G, los llamaremos *marcados*. Si M es cierto polígono, la suma de sus ángulos, cuyos vértices son los puntos marcados, la designaremos por $I_P(M)$. Si los polígonos M y M' se obtienen uno del otro con ayuda de cierto movimiento, que pertenece al grupo G, $I_P(M) = I_P(M')$. A continuación, si el polígono A está dividido en varios polígonos menores $M_1, M_2, \ldots, M_k$, tiene lugar la igualdad

$$I_P(A) = I_P(M_1) + I_P(M_2) + \ldots + I_P(M_P(M_k) + n\pi,$$

donde n es cierto número entero (esto se demuestra mediante el cálculo directo de los ángulos). De estas propiedades del número $I_P(M)$ se desprende fácilmente (compárense los razonamientos en la pág. 36), que si M y M' son dos polígonos G-equicompuestos, entonces, $I_P(M) = I_P(M') + n\pi$, donde n es cierto número entero.

Sean ahora PQR y PQS dos triángulos obtusángulos isósceles iguales con el ángulo α en la base, de los cuales uno tiene el vértice del ángulo obtuso en P, mientras que el otro, en Q (fig. 39). Ya que el punto P está marcado, y el punto Q, no, el número $I_P(PQR)$ es igual a $\pi - 2\alpha$ o $\pi - \gamma$ (en función de si estaría o no marcado el punto R); en tanto que el número $I_P(PQS)$ es igual a α o a 2α. Por esto la igualdad

$$I_P(PQR) = I_P(PQS) + n\pi$$

no puede ser válida con ningún número entero n (ya que $\alpha < \pi/4$), y los triángulos PQR y PQS no son G-equicompuestos. Esto, sin embargo, contradice a las propiedades del grupo G (los polígonos equivalentes, y tanto más iguales, deben ser G-equicompuestos). La contradicción obtenida demuestra el lema.

LEMA 13 *El grupo G contiene por lo menos una simetría central.*

Marquemos primeramente (sin demostraciones [11]) algunas propiedades de los movimientos. Cada movimiento del plano tiene uno de los tres siguientes aspectos: éste es ya traslación paralela, o giro, o bien la llamada *simetría deslizante*, que representa de por sí la simetría con respecto a cierta recta, la cual se acompaña por la traslación paralela a lo largo de esta recta. Esta se llama *eje* de la simetría deslizante. El eje se determina unívocamente (es decir, dos simetrías deslizantes, cuyos ejes no coinciden, son *diferentes* movimientos). Por último, señalemos que el producto de dos simetrías deslizantes, cuyos ejes forman entre sí el ángulo α, es el *giro* al ángulo 2α.

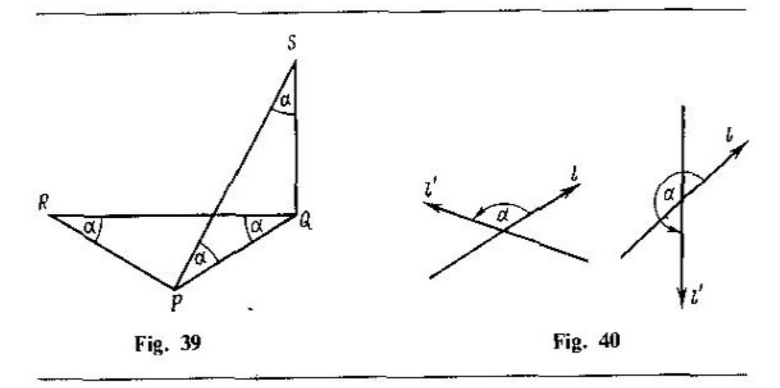


Fig. 39

Fig. 40

Pasemos a la demostración del lema 13. Elijamos del modo siguiente la recta l: si en el grupo G hay por lo menos una simetría deslizante, entonces tomamos por l el eje de una de éstas; en el caso contrario elegimos la recta l arbitrariamente. En la recta l elegimos cualquiera dirección. Sea l' una recta dirigida arbitrariamente, y α, un ángulo formado entre l y l' (fig. 40); consideraremos la recta l' *marcada*, si en el grupo G hay un giro al ángulo α. En particular, toda recta paralela a l (es decir, la que forma con l el ángulo *nulo*), se ha de considerar marcada.

Supongamos ahora (a pesar, de la afirmación del lema) que en el grupo G no hay ni una sola simetría central. Entonces, para toda recta marcada l' la recta l'', que es paralela a l', pero que tiene la dirección contraria, no es marcada (en caso contrario el grupo G contendría dos

[11] Las demostraciones de las propiedades de los movimientos se puede encontrar, por ejemplo, en la primera parte del libro de *I. M. Yaglom* «Transformaciones geométricas» («Gostejizdat», 1955, en ruso).

giros, cuyos ángulos se distinguen por π, y por esta razón, también contendría el giro al ángulo π, es decir, la simetría central, véase la fig. 41).

Examinemos el polígono arbitrario M y sea AB su lado, mientras que l', la recta que interseca este lado y perpendicular a éste. Elijamos en la recta l' tal dirección que, avanzando por la recta l' en esta dirección, saldremos, al intersecar el lado AB, del interior del polígono M afuera (fig. 42). Si la recta l' dirigida de este modo es marcada, atribuiremos al lado AB el signo $+$; y si la recta l'' es paralela a l', pero dirigida de modo contrario es marcada, atribuiremos a este lado el signo $-$; finalmente, si ni una de estas rectas no es marcada, al lado AB pondremos correspondientemente el número cero. Compongamos ahora la suma

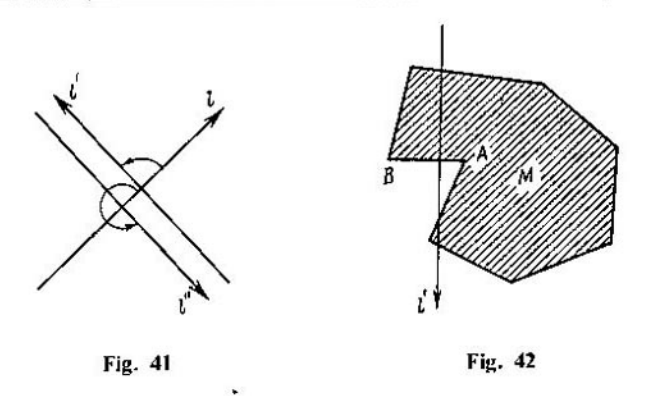


Fig. 41 Fig. 42

algebraica de las longitudes de los lados del polígono M, tomando en consideración dichos signos (si al lado AB está puesto correspondientemente el número cero, éste no entra completamente en la suma algebraica examinada). La suma algebraica obtenida la designaremos por $J'_l(M)$.

El número $J'_l(M)$ posee las dos siguientes propiedades: 1) es *aditivo* (compárese la fórmula (3)) y 2) es *invariante* (si los polígonos M_1 y M_2 se obtienen uno del otro con ayuda de cierto movimiento, que pertenece al grupo G, $J'_l(M_1) = J'_l(M_2)$). La aditividad se establece mediante la repetición casi textual de la demostración del lema 11.

Demostremos la invariación. Sea g un movimiento que pertenece al grupo G y que traslada el polígono M_1 a M_2; A_1B_1 es el lado del polígono M_1, mientras que A_2B_2 es el lado, correspondiente al primero, del polígono M_2 (es decir, el lado al que se traslada A_1B_1 en consecuencia del movimiento g). Sea, luego, l_1 una recta perpendicular al lado A_1B_1, mientras que l_2, una recta perpendicular a A_2B_2, además, cada una de

estas rectas está dirigida de tal modo que, al intersecarse con el lado indicado, salimos del interior del polígono afuera (fig. 43). Designemos los ángulos formados por las rectas l_1 y l_2 con la recta l, respectivamente, por α_1 y α_2. Supongamos que la recta l_1 es marcada, y mostremos que l_2 también es una recta marcada. Si el movimiento g es una traslación paralela, entonces, la recta l_2 es paralela a la recta l_1 y está dirigida idénticamente que ésta, y por esto, es marcada. Si g es un giro, el ángulo de este giro es igual a $\alpha_2 - \alpha_1$, y, ya que en G hay un giro al ángulo α_1 (pues, la recta l_1 es marcada), entonces, en G hay también un giro al ángulo $(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 = \alpha_2$; esto significa que la recta l_2 es marcada. Por fin, si g es una simetría deslizante, su eje compone con

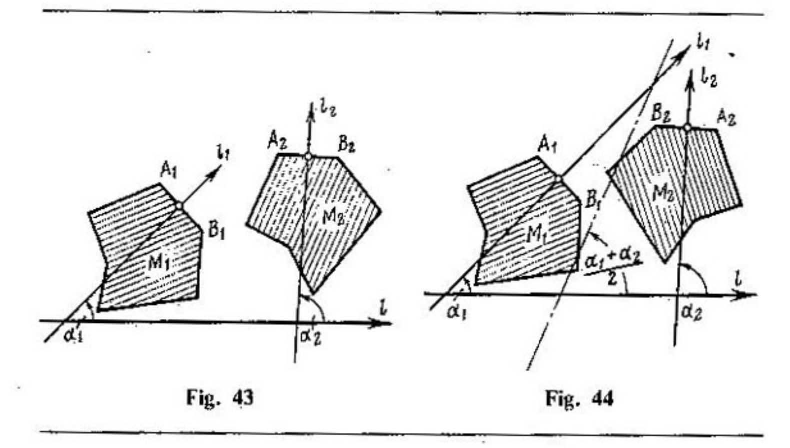


Fig. 43 **Fig. 44**

la recta l (la que también es en este caso un eje de la simetría deslizante) el ángulo $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ (fig. 44), y, por esta razón, en el grupo G hay un giro al ángulo $\alpha_1 + \alpha_2$. Además, en G hay un giro al ángulo α_1 (ya que la recta l_1 es marcada), y por esto también el giro al ángulo $(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1 = \alpha_2$. Por lo tanto, también en este caso la recta l_2 es marcada. Pues bien, si al lado A_1B_1 del polígono M_1 está puesto en concordancia el signo + (es decir, la recta l_1 es marcada), entonces al lado A_2B_2 del polígono M_2 también está puesto en concordancia el signo + (la recta l_2 también es marcada). De modo semejante se establece que si al lado A_1B_1 está puesto en concordancia el signo $-$, entonces al lado A_2B_2 también está puesto en concordancia el signo $-$. Finalmente, si al lado A_1B_1 está puesto en concordancia el número cero, lo mismo también tiene lugar para el lado A_2B_2 (el polígono M_1 se obtiene del M_2 con ayuda del movimiento g^{-1}, y si al lado A_2B_2 correspondiera el signo + o $-$, entonces el mismo signo correspondería también al lado A_1B_1). Así pues,

los lados correspondientes de los polígonos M_1 y M_2 se toman en las sumas algebraicas $J'_l(M_1)$ y $J'_l(M_2)$ con iguales coeficientes, de esta manera $J'_l(M_1) = J'_l(M_2)$.

De la aditividad y de la invariación del número $J'_l(M)$ se infiere (compárese el razonamiento en la pág. 36), que si los polígonos M_1 y M_2 son G-equicompuestos, $J'_l(M_1) = J'_l(M_2)$.

Examinemos ahora dos triángulos rectángulos isósceles iguales $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ dispuestos como está indicado en la fig. 45. Al lado B_2C_2 del triángulo $A_2B_2C_2$ corresponde el número cero; efectivamente, la recta l', perpendicular a este lado, forma con l el ángulo $3/4\pi$, mientras que el giro al ángulo $3/4\pi$ no entra en el grupo G (ya que el empleo cuadruplicado de este giro da el giro al ángulo 3π, es decir, la simetría central).

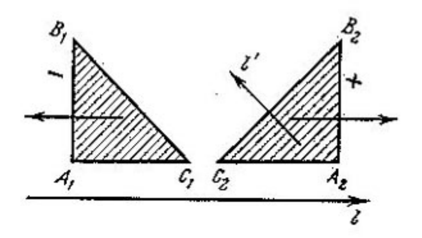


Fig. 45

Análogamente, a cada uno de los lados A_1C_1, B_1C_1 y A_2C_2 corresponde el número cero. Por último, al lado A_2B_2 corresponde el signo $+$, mientras que al lado A_1B_1, el signo $-$. Vemos, que $J'_l(A_1B_1C_1) \neq \neq J'_l(A_2B_2C_2)$ (ya que uno de estos números es positivo, y el otro, negativo), y, por esta razón, los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ no son G-equicompuestos. Esto, sin embargo, contradice a las propiedades del grupo G.

LEMA 14. *El grupo G contiene todas las simetrías centrales.*

Sea s la simetría central que pertenece al grupo G (lema 13), O_1, el centro de esta simetría, mientras que O, un punto arbitrario en el plano. Sea, a continuación, g el movimiento que pertenece al grupo G y que traslada el punto O al O_1 (lema 12). Entonces, el movimiento gsg^{-1} perteneciente al grupo G, como es fácil de ver, deja el punto O en su lugar y, por lo tanto, representa de por sí la simetría central con respecto al punto O. De tal guisa, la simetría central respecto del punto arbitrario O pertenece al grupo G.

Para la demostración del teorema queda ahora sólo señalar que, de acuerdo con el lema 7, el grupo G contiene también todas las traslaciones paralelas.

CAPÍTULO II

EQUICOMPOSICIÓN DE POLIEDROS

§ 5. TEOREMAS DE DEHN Y DE HADWIGER

1. POLIEDROS EQUICOMPUESTOS. En este capítulo examinaremos el problema acerca de la equicomposición y la equiadición para las figuras espaciales (para poliedros). Dos poliedros se llaman equicompuestos, si, al cortar de cierto modo uno de éstos en un número finito de partes, se puede componer de éstas un segundo poliedro.

Está claro que dos poliedros equicompuestos son equivalentes, es decir, tienen igual volumen. Naturalmente, surge la cuestión inversa: ¿son equicompuestos cualesquiera dos poliedros que tienen igual volumen? Con otras palabras, ¿es válido en el espacio un teorema análogo al de Bolyai – Gerwien? Nosotros veremos posteriormente que es necesario dar una respuesta negativa.

Ante todo intentemos comprender, qué significa la respuesta negativa a la cuestión planteada. ¿Significa esto que ningunos dos poliedros, de igual volumen, son equicompuestos? No, naturalmente. Está claro que poliedros equicompuestos existen. Por ejemplo, dos prismas rectos de igual altura e igual área de las bases son equicompuestos (fig. 46). Esto se desprende de fácil modo del teorema de Bolyai – Gerwien. (Más adelante, en la pág. 66, será

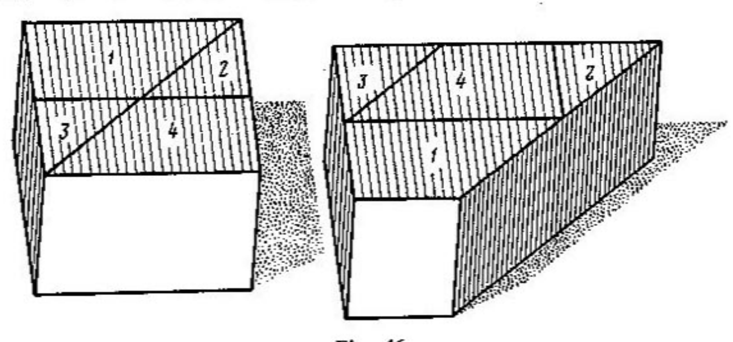


Fig. 46

demostrado que cualesquiera dos prismas equivalentes, rectos u oblicuos, son equicompuestos). ¿Y qué significa en este caso la respuesta negativa a la cuestión planteada? Significa que *no todos* los poliedros, que tienen igual volumen, son equicompuestos. Hablando de otro modo, ciertos poliedros de igual volumen son equicompuestos (por ejemplo, prismas), sin embargo, *pueden hallarse también tales poliedros, que tienen igual volumen, pero no son equicompuestos*. Por primera vez este hecho fue demostrado por el matemático alemán Dehn (1901). El estableció que el cubo y la pirámide triangular regular (tetraedro) de igual volumen no son equicompuestos. Naturalmente, se puede también hallar otros poliedros que tienen igual volumen, pero no son equicompuestos.

Este párrafo contiene la demostración del teorema de Dehn sobre la falta de equicomposición del cubo y el tetraedro regular. En la demostración se utilizan las ingeniosas ideas que pertenecen al geómetra suizo Hadwiger.

2. TEOREMA DE HADWIGER Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ cualesquiera números reales. Diremos que estos números son *dependientes*, si se puede hallar tales números enteros $n_1, n_2, \ldots, n_k$, que no todos se anulan, que tiene lugar la correlación

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k = 0. \tag{9}$$

Llamaremos esta correlación (9) *dependencia*. Subrayemos una vez más que todos los números $n_1, n_2, \ldots, n_k$ se supone que son enteros (positivos, negativos o iguales a cero), además, entre éstos debe haber obligatoriamente números que difieren de cero.

Entre los mismos números pueden existir diferentes dependencias. Tomemos, por ejemplo, los números

$$1, \quad \sqrt{2}-1, \quad 3\sqrt{2}+1, \quad 2\sqrt{2}.$$

Es fácil de comprobar, que entre estos números hay las siguientes dependencias:

$$2\cdot 1 + 1\cdot(\sqrt{2}-1) + (-1)(3\sqrt{2}+1) + 1\cdot 2\sqrt{2} = 0,$$
$$4\cdot 1 + 3\cdot(\sqrt{2}-1) + (-1)(3\sqrt{2}+1) + 0\cdot 2\sqrt{2} = 0,$$
$$0\cdot 1 + (-1)(\sqrt{2}-1) + (-1)(3\sqrt{2}+1) + 2\cdot 2\sqrt{2} = 0.$$

Advirtamos, que dos números *inconmensurables* α_1 y α_2 (es decir, dos números diferentes de cero, cuya relación es irracional) no pueden ser dependientes. Efectivamente, de la dependencia

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 = 0$$

se desprendería que el cociente α_1/α_2 es igual a la relación $-n_2/n_1$ de dos números enteros, es decir, es racional.

Ahora supongamos que a cada uno de los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_k$ está puesto correspondientemente otro número más:

al número α_1 está puesto correspondientemente el número $f(\alpha_1)$,
" " α_2 " " " " " $f(\alpha_2)$.
. . . .
" " α_k " " " " " $f(\alpha_k)$.

Diremos que los números $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$ forman la *función aditiva* [1], que corresponde a los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, si éstos poseen la propiedad siguiente: para cada dependencia

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k$$

que existe entre los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ [illegible] ente la misma dependencia también existe entre los númer[illegible] $f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$, es decir,

$$n_1 f(\alpha_1) + n_2 f(\alpha_2) + \ldots + n_k f(\alpha_k) = 0.$$

Pero, en lo demás, los números $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k)$ pueden ser cualesquiera.

Tomemos, como ejemplo, los números $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = \sqrt{5}$. Dado que estos números son inconmensurables, entre éstos no existe ninguna dependencia. Por este motivo, tampoco se exige ninguna dependencia entre los números $f(\alpha_1)$ y $f(\alpha_2)$, es decir, para obtener una función aditiva se puede escoger los números $f(1)$ y $f(\sqrt{5})$ de modo completamente arbitrario. Sin embargo, si los números tomados resultaran dependientes, los valores de la función aditiva también están ligados por dependencias.

Por último, sean

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_k \tag{10}$$

---

[1] Desde el punto de vista moderno tenemos una *función*, si a cada uno de los elementos de cierto conjunto está puesto correspondientemente (según una regla) cierto elemento de otro conjunto. De tal modo, poniendo correspondientemente a cada número real x el número sen x, nosotros obtenemos una función (seno); al poner correspondientemente a cada número positivo entero su divisor máximo sencillo, obtenemos una función; al poner correspondientemente a los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ algunos otros números $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_k)$, también tenemos una *función*.

todos los ángulos diedros interiores de cierto poliedro A, expresados en radianes, mientras que $l_1, l_2, \ldots, l_k$, las longitudes de las aristas que corresponden a estos ángulos diedros (fig. 47). Si está elegida cierta función aditiva

$$f(\alpha_1), \quad f(\alpha_2), \ldots, \quad f(\alpha_k) \tag{11}$$

para los números (10), entonces la suma

$$l_1 f(\alpha_1) + l_2 f(\alpha_2) + \ldots + l_k f(\alpha_k) \tag{12}$$

la designaremos por $f(A)$ y la llamaremos *invariante* del poliedro A. El invariante $f(A)$ depende no sólo de la elección del propio poliedro A, sino también de la elección de la función aditiva (11).

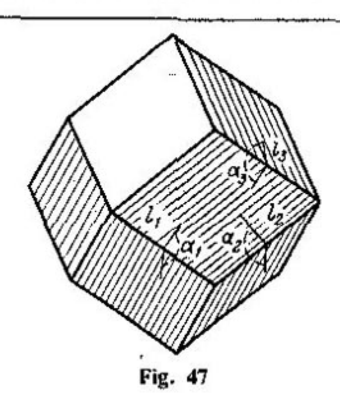


Fig. 47

Ahora podemos enunciar el siguiente interesante teorema.

TEOREMA DE HADWIGER. *Sean dados dos poliedros A y B de igual volumen. Designemos por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, todos los ángulos diedros interiores del poliedro A, expresados en radianes, y por $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, todos los ángulos diedros interiores del poliedro B. A los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ agregaremos, además, el número π. Si para el sistema de números obtenido*

$$\pi, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \ldots, \beta_q \tag{13}$$

se puede escoger tal función aditiva

$$f(\pi), f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_p), f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_q), \tag{14}$$

que se cumpla la correlación

$$f(\pi) = 0, \tag{15}$$

mientras que los invariantes respectivos de los poliedros A y B no son iguales:

$$f(A) \neq f(B), \tag{16}$$

en este caso los poliedros A y B no son equicompuestos.

La demostración del teorema de Hadwiger será examinada posteriormente (pág. 54), pero ahora mostraremos, cómo de éste se desprende el teorema de Dehn sobre la falta de equicomposición del cubo y la pirámide regular.

3. TEOREMA DE DEHN. Ante todo demostremos el lema siguiente, con ayuda del cual es fácil de establecer (a base del teorema de Hadwiger) la validez del teorema de Dehn.

LEMA 15. *Sea n un número entero, mayor que dos, mientras que φ, tal ángulo expresado en radianes, cuyo coseno es igual a $1/n$, (es decir, $\varphi = \arccos 1/n$). Entonces, el número φ es inconmensurable con π, o sea, no existe ninguna dependencia*

$$n_1\varphi + n_2\pi = 0 \tag{17}$$

con coeficientes enteros n_1 y n_2 que difieren de cero.

Efectuaremos la demostración mediante el método «por reducción al absurdo». Supongamos que tiene lugar la correlación (17), donde $n_1 \neq 0$. Nosotros podemos considerar que $n_1 > 0$ (de otro modo, en la correlación (17) se podría cambiar los signos por los inversos). Ya que $n_1\varphi = -n_2\pi$ es el múltiplo numérico entero del ángulo π, entonces $\cos n_1\varphi$ es igual a $+1$, o bien -1, es decir, es un número entero. Esta misma afirmación la reduciremos a una contradicción. Precisamente mostraremos que con ningún número entero $k > 0$, el número $\cos k\varphi$ no es entero.

A base del teorema de adición conocido del curso de trigonometría, podemos escribir:

$$\cos(k+1)\varphi = \cos(k\varphi + \varphi) = \cos k\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen} k\varphi \operatorname{sen}\varphi,$$
$$\cos(k-1)\varphi = \cos(k\varphi - \varphi) = \cos k\varphi \cos\varphi + \operatorname{sen} k\varphi \operatorname{sen}\varphi.$$

Sumando estas dos igualdades, obtenemos:

$$\cos(k+1)\varphi + \cos(k-1)\varphi = 2\cos k\varphi \cos\varphi$$

o bien

$$\cos(k+1)\varphi = \frac{2}{n}\cos k\varphi - \cos(k-1)\varphi \tag{18}$$

(dado que $\cos\varphi = 1/n$). La parte posterior de la demostración

la realizaremos independientemente para los valores de n pares e impares.

CASO 1. El número n es impar[1]. Mostremos (con ayuda del método de la inducción matemática completa), que en este caso $\cos kx$ se expresa mediante una fracción, cuyo denominador es igual a n^k, en tanto que el numerado es recíprocamente sencillo con n; de aquí se desprenderá que el número $\cos kx$ para $k > 0$ no es entero. Para $k = 1$ y $k = 2$ esta afirmación se comprueba directamente:

$$\cos \varphi = \frac{1}{n},$$

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 = \frac{2}{n^2} - 1 = \frac{2 - n^2}{n^2}$$

(el número 2 es recíprocamente primo con n, ya que n es impar). Supongamos, que para todos los números 1, 2, ..., k nuestra afirmación está demostrada, y demostrémosla para el número $k + 1$. De acuerdo con la suposición de la inducción tenemos:

$$\cos k\varphi = \frac{a}{n^k}, \quad \cos (k-1)\varphi = \frac{b}{n^{k-1}},$$

donde a y b son números recíprocamente primos con n. De aqui a base de la igualdad (18) obtenemos:

$$\cos (k+1)\varphi = \frac{2}{n}\frac{a}{n^k} - \frac{b}{n^{k-1}} = \frac{2a - bn^2}{n^{k+1}}.$$

Ya que el número a y el número 2 no tienen con n factores comunes, el numerador $2a - bn^2$ es recíprocamente primo con n. La inducción se cumple.

CASO 2. El número n es par, es decir, $n = 2m$. Con ello $\cos k\varphi$ se expresa mediante una fracción, cuyo denominador tiene el aspecto $2m^k$, mientras que el numerador es recíprocamente primo con m (lo que se demuestra según la inducción análogamente como en el caso 1). Por esta razón, para $k > 0$, al dividir el numerador entre el denominador, resulta un número no entero.

TEOREMA DE DEHN. *El cubo y el tetraedro regular, de igual volumen, no son equicompuestos.*

[1] Solamente este caso (a saber, $n = 3$) se utiliza para la demostración del teorema de Dehn.

DEMOSTRACIÓN. En la pirámide triangular regular $ABCD$ bajemos del punto D la altura DE (fig. 48). El punto E es el centro del triángulo equilátero ABC, de esta manera el segmento AF, que pasa a través del punto E es una mediana. Por esto F es el punto medio de la arista BC, mientras que el segmento DF, la mediana del triángulo BCD. El segmento EF compone una tercera parte de la mediana AF o de la mediana DF, es decir,

$$EF : DF = 1 : 3.$$

Con otras palabras, al designar por φ el ángulo F del triángulo rectángulo DEF (es decir, el ángulo diedro del tetraedro $ABCD$), hallaremos:

$$\cos\varphi = 1/3. \tag{19}$$

Ahora utilicemos el teorema de Hadwiger. Cada ángulo diedro del cubo A es igual a $\pi/2$; el ángulo diedro del tetraedro regular B

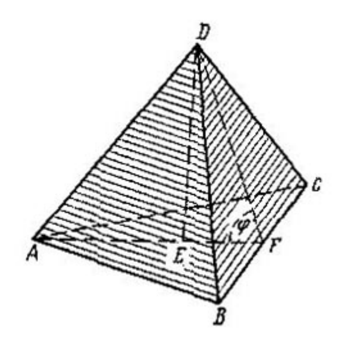


Fig. 48

lo hemos designado por φ. Por esta razón los números (13), de los que se trata en el teorema de Hadwiger, aquí serán los siguientes:

$$\pi, \quad \pi/2 \text{ y } \varphi. \tag{20}$$

Hallemos, qué dependencias existen entre estos números. Sea que

existe la dependencia

$$n_1\pi + n_2\pi/2 + n_3\varphi = 0, \tag{21}$$

donde n_1, n_2 y n_3 son números enteros. Entonces

$$(2n_1 + n_2)\pi + 2n_3\varphi = 0,$$

es decir, obtenemos la dependencia entre los números π y φ. Pero tal dependencia con coeficientes no nulos no existe, ya que, a causa del lema 15, el ángulo φ es inconmensurable con π (véase (19)). Por esto $2n_1 + n_2 = 0$, $n_3 = 0$, y la correlación (21) toma el aspecto

$$n_1\pi + (-2n_1)\pi/2 = 0. \tag{22}$$

Otras dependencias entre los números (20) no existen. Hagamos:

$$f(\pi) = f(\pi/2) = 0, \quad f(\varphi) = 1. \tag{23}$$

Esto nos da la función aditiva determinada para los números (20). Efectivamente, para toda dependencia entre los números (20), es decir, para la correlación (22), tenemos una dependencia análoga entre los números (23):

$$n_1 f(\pi) + (-2n_1) f(\pi/2) = 0.$$

Así pues, hemos obtenido una función aditiva prefijada para los números (20) que satisface también la correlación (15). Queda por establecer la correlación (16), y la falta de equicomposición del cubo y de la pirámide será demostrada.

El cubo A tiene 12 aristas. Designemos la longitud de su arista por l. Entonces, el invariante $f(A)$ tiene para el cubo A el valor

$$f(A) = 12lf(\pi/2) = 0$$

(véase (23)). La longitud de la arista de la pirámide regular B la designaremos por m. Entonces, el invariante $f(B)$ de la pirámide B tomará el aspecto

$$f(B) = 6mf(\varphi) = 6m \neq 0$$

(véase (23)). Por lo tanto, $f(A) \neq f(B)$, y por esta razón el cubo A y la pirámide B no son equicompuestos. El teorema de Dehn está demostrado.

Queda por demostrar el teorema de Hadwiger. Pasemos a su demostración.

4. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE HADWIGER.

LEMA 16. *Sean*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_k \tag{24}$$

y

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \ldots, \quad \gamma_l \tag{25}$$

números reales, mientras que

$$f(\alpha_1), \quad f(\alpha_2), \ldots, \quad f(\alpha_k), \tag{26}$$

una función aditiva para los números (24). *Con ello se puede elegir tales números*

$$f(\gamma_1), \quad f(\gamma_2), \ldots, \quad f(\gamma_l), \tag{27}$$

que los números (26) *y* (27) *formen una función aditiva para los números* (24) *y* (25) *tomados conjuntamente. Hablando de otro modo, la función aditiva para los números* (24) *puede ser completada hasta una función aditiva para los números* (24) *y* (25).

Es suficiente examinar el caso, cuando para los números (24) se adiciona sólo un número γ (ya que los números (25) no pueden ser adicionados de una vez, sino uno tras otro). Pues bien, está prefijada la función aditiva (26) para los números (24) y, además, está prefijado el número γ. Debemos escoger tal número $f(\gamma)$, que el sistema de los números

$$f(\alpha_1), \quad f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_k), \quad f(\gamma) \tag{28}$$

represente de por sí una función aditiva para los números

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \quad \gamma. \tag{29}$$

Examinaremos dos casos.

CASO 1. Entre los números (29) no existe ninguna dependencia

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k + n\gamma = 0,$$

donde el coeficiente n para el número γ sería diferente de cero. Con otras palabras, el número γ no entra en ninguna dependencia. En este caso el número $f(\gamma)$ no está relacionado con ningunas condiciones, es decir, por $f(\gamma)$ se puede tomar cualquier número real.

CASO 2. Entre los números (29) hay una dependencia, en la cual entra el número γ:

$$n'_1\alpha_1 + n'_2\alpha_2 + \ldots + n'_k\alpha_k + n'\gamma = 0, \ n' \neq 0. \tag{30}$$

En este caso determinaremos el número $f(\gamma)$ de la correlación

$$n'_1 f(\alpha_1) + n'_2 f(\alpha_2) + \ldots + n'_k f(\alpha_k) + n' f(\gamma) = 0, \qquad (31)$$

es decir, hacemos:

$$f(\gamma) = -\frac{n'_1}{n'} f(\alpha_1) - \frac{n'_2}{n'} f(\alpha_2) - \ldots - \frac{n'_k}{n'} f(\alpha_k).$$

Mostremos que de tal modo obtendremos una función aditiva para los números (29). Sea

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_k\alpha_k + n\gamma = 0 \qquad (32)$$

cualquiera dependencia entre los números (29) (diferente de la dependencia (30) o coincidente con ésta). Debemos mostrar que esta misma dependencia también existe entre los números (28), es decir, que tiene lugar la correlación

$$n_1 f(\alpha_1) + n_2 f(\alpha_2) + \ldots + n_k f(\alpha_k) + n f(\gamma) = 0. \qquad (33)$$

Demostremos esto. Multiplicamos la correlación (32) por n' y restamos de ésta la correlación (30) multiplicada por n:

$$(n'n_1 - nn'_1)\alpha_1 + (n'n_2 - nn'_2)\alpha_2 + \ldots + (n'n_k - nn'_k)\alpha_k = 0.$$

Obtenemos la dependencia entre los números (24), y ya que (26) es una función aditiva para estos números, tiene lugar la correlación

$$(n'n_1 - nn'_1) f(\alpha_1) + (n'n_2 - nn'_2) f(\alpha_2) + \ldots + (n'n_k - nn'_k) f(\alpha_k) = 0.$$

Al adicionar a esta proporción la igualdad (31), multiplicada por n, hallaremos:

$$n'n_1 f(\alpha_1) + n'n_2 f(\alpha_2) + \ldots + n'n_k f(\alpha_k) + n'n f(\gamma) = 0.$$

Por último, reduciendo esta igualdad en el número $n' \neq 0$, recibiremos (33). Por lo tanto, los números (28) nos dan una función aditiva.

LEMA 17. *Sea A un poliedro dividido de modo arbitrario en un número finito de poliedros menores $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Designemos por*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \qquad (34)$$

todos los ángulos diedros del poliedro A, mientras que por

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m \qquad (35)$$

todos los ángulos diedros de todos los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Agregamos además a los números (34) y (35) el número π y supon-

gamos que para el sistema de números obtenido

$$\pi; \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \quad \gamma_1, \quad \gamma_2, \ldots, \gamma_r \tag{36}$$

está prefijada la función aditiva

$$f(\pi), f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_p), f(\gamma_1), f(\gamma_2), \ldots, f(\gamma_r), \tag{37}$$

que satisface la condición

$$f(\pi) = 0. \tag{38}$$

Entonces, los invariantes $f(A)$, $f(M_1)$, $f(M_2)$, ..., $f(M_k)$ de los poliedros a examinar se relacionan mediante la correlación

$$f(A) = f(M_1) + f(M_2) + \ldots + f(M_k). \tag{39}$$

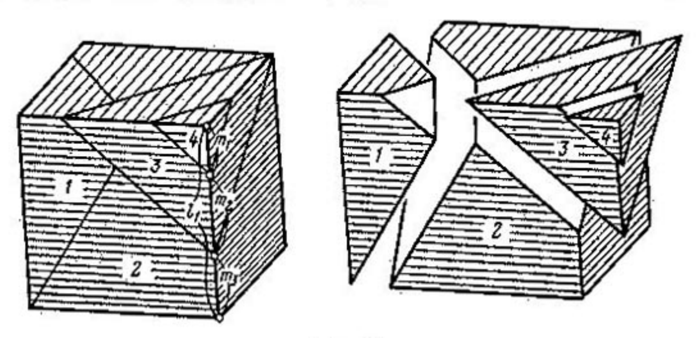


Fig. 49

Para la demostración examinaremos todos los segmentos que son las aristas de los poliedros A, M_1, M_2, ..., M_k. Marquemos en estos segmentos todos los puntos que son los vértices de los poliedros A, M_1, M_2, ..., M_k, así como todos los puntos, en los cuales se intersecan las aristas entre sí. Con ello obtendremos un número finito de segmentos menores. Los llamaremos (según V. F. Kagán) *eslabones*. La fig. 49 ilustra la división del cubo en poliedros; la arista del cubo designada en esta figura por l_1, consta de tres eslabones m_1, m_2 y m_3. En general, cada arista de cada uno de los poliedros A, M_1, M_2, ..., M_k consta de uno o varios eslabones. Cada eslabón del poliedro A (es decir, el eslabón que se encuentra en una de las aristas del poliedro A) también es el eslabón de uno o de varios poliedros M_1, M_2, ..., M_k. Tomemos

cualquiera eslabón del poliedro A, y sea m su longitud, en tanto que α, el ángulo diedro respectivo del poliedro A. Entonces, α es uno de los números (34), y por esta razón, está determinado el número $f(\alpha)$. El producto $m \cdot f(\alpha)$ lo llamaremos *peso* del eslabón examinado en el poliedro A. Precisamente así mismo se determinan los pesos de los eslabones en los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Advirtamos que un mismo eslabón puede tener diferente peso en distintos poliedros que lindan con este eslabón: los poliedros adyacentes pueden tener diferentes ángulos diedros en este eslabón.

Ahora tomemos todos los eslabones del poliedro A, hallemos sus pesos en este poliedro y compongamos la suma de todos estos pesos. Es fácil de ver, que esta suma es igual al invariante $f(A)$ del poliedro A. Efectivamente, examinemos la arista l_1 del poliedro A y sea que consta, por ejemplo, de tres eslabones, que tienen las longitudes m_1, m_2 y m_3 (fig. 49). En este caso a cada uno de los eslabones m_1, m_2 y m_3 corresponde en el poliedro A el mismo ángulo diedro α_1, a saber, el ángulo diedro en la arista l_1. Por esta razón, la suma de los pesos de los eslabones m_1, m_2 y m_3 es igual a

$$m_1 f(\alpha_1) + m_2 f(\alpha_1) + m_3 f(\alpha_1) = (m_1 + m_2 + m_3) f(\alpha_1) = l_1 f(\alpha_1).$$

Precisamente así mismo la suma de los pesos de todos los eslabones, de los cuales consta la arista l_2 del poliedro A, es igual a $l_2 f(\alpha_2)$, etc. Por este motivo, la suma de los pesos de todos los eslabones del poliedro A coincide con la suma (12), es decir, es igual al invariante $f(A)$ del poliedro A.

Absolutamente igual, el invariante de cada uno de los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$ es igual a la suma de los pesos de todos sus eslabones (naturalmente, el peso de cada eslabón se calcula en el poliedro examinado).

Ahora es fácil de establecer la validez de la correlación (39). Para calcular la suma, que se encuentra en el segundo miembro de esta correlación, es necesario tomar la suma de los pesos de todos los eslabones por todos los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Hallemos el coeficiente con que cierto eslabón m entra en esta suma. Designemos todos los ángulos diedros de los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$, que lindan con el eslabón m, por

$$\gamma_i, \gamma_j, \ldots, \gamma_s$$

(estos valores se contienen entre los números (35)). Entonces, el peso del eslabón examinado en el poliedro con el ángulo diedro

γ_i es igual a $mf(\gamma_i)$; su peso en el poliedro con el ángulo diedro γ_j es igual a $mf(\gamma_j)$, etc. Por lo tanto, la suma de los pesos del eslabón m por todos los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$, lindantes con este eslabón, es igual a

$$mf(\gamma_i) + mf(\gamma_j) + \ldots + mf(\gamma_s). \tag{40}$$

Todos los eslabones pueden ser divididos en tres grupos.

1) Los eslabones que enteramente (salvo, puede ser, los extremos) se disponen dentro del poliedro A. Si m es tal eslabón y si *cada uno* de los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$, que *lindan* con el segmento m, tiene este segmento como su eslabón, entonces los ángulos

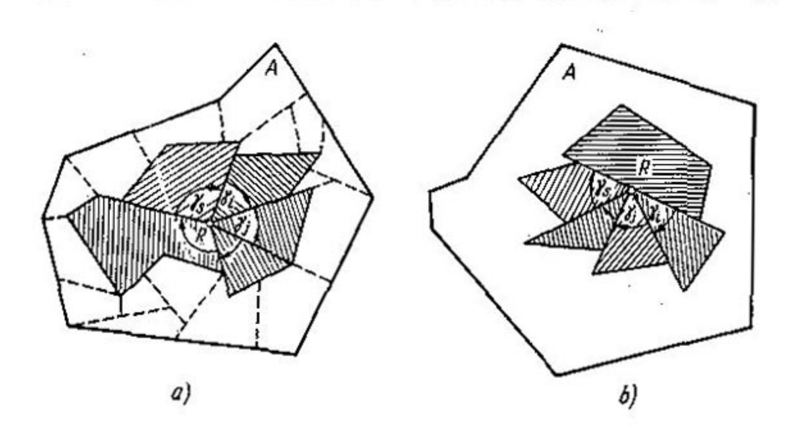


Fig. 50

diedros de los poliedros, adyacentes al eslabón m, forman con su suma un ángulo entero (fig. 50, a; esta figura, así como también las figuras 50, b, 51, 52, a y 52, b, ilustran la sección del poliedro A y de los poliedros, que lindan con el segmento m mediante el plano perpendicular al eslabón m; el mismo eslabón m se muestra en estas figuras por un punto R). De tal manera, con ello $\gamma_i + \gamma_j + \ldots + \gamma_s = 2\pi$ o

$$\gamma_i + \gamma_j + \ldots + \gamma_s - 2\pi = 0.$$

Esto es una dependencia entre los números (36), y por esta razón

tenemos:

$$f(\gamma_i) + f(\gamma_j) + \ldots + f(\gamma_s) - 2f(\pi) = 0.$$

De acuerdo con (38) obtenemos de aquí $f(\gamma_i) + f(\gamma_j) + \ldots$ $\ldots + f(\gamma_s) = 0$, y la expresión (40) se anula.

Pero, si m es el eslabón que se ubica dentro del poliedro A, mientras que uno[1] de los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$, que linda

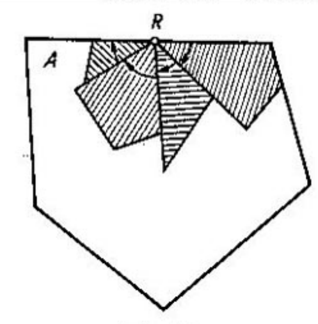


Fig. 51

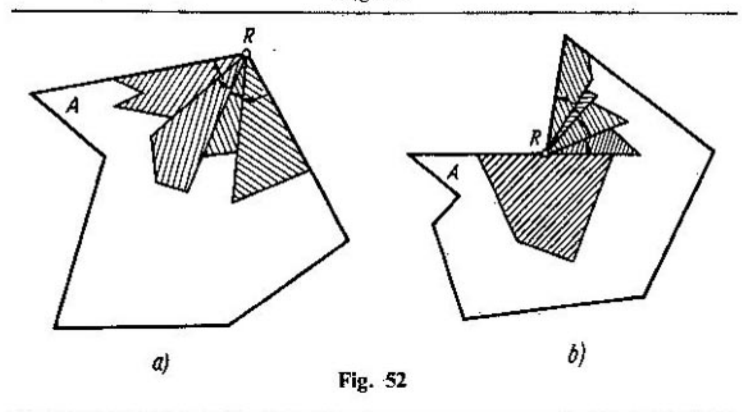


Fig. 52

[1] Si dos poliedros lindantes con el segmento m no tienen éste como su eslabón, es decir, si el segmento m se encuentra dentro de las aristas de dos poliedros adyacentes uno con el otro, sólo estos dos poliedros lindan con el segmento m, de manera que éste no se encuentra en ninguna arista de los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$ y por esto no es un eslabón.

con el segmento m, *no tiene éste como su eslabón* (es decir el segmento m se ubica *dentro de la cara* de uno de los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$), los ángulos diedros de los demás poliedros, adyacentes al segmento m, forman en su suma un ángulo (fig. 50, *b*), es decir,

$$\gamma_i + \gamma_j + \ldots + \gamma_s = \pi.$$

De aquí, como también anteriormente, se desprende que la expresión (40) se anula.

Por lo tanto, los eslabones dispuestos *dentro* del poliedro A se pueden no tomar en consideración (para éstos la suma de los pesos es igual a cero), al calcular el segundo miembro de la igualdad (39).

2) Los eslabones dispuestos en las caras del poliedro A, pero no en sus aristas. En este caso

$$\gamma_i + \gamma_j + \ldots + \gamma_s = \pi$$

(fig. 51) y la expresión (40), como también en el caso anterior se anula.

3) Queda por examinar los eslabones que se encuentran en las aristas del poliedro A. Con ello la suma $\gamma_i + \gamma_j + \ldots + \gamma_s$ es igual o bien al ángulo diedro α de la arista respectiva:

$$\gamma_i + \gamma_j + \ldots + \gamma_s = \alpha$$

(fig. 52, *a*), o bien, al ángulo $\alpha - \pi$ (es decir, $\gamma_i + \gamma_j + \ldots + \gamma_s = \alpha - \pi$; esto puede ocasionarse, si el ángulo α es obtuso, véase la fig. 52, *b*). En ambos casos tenemos:

$$f(\gamma_i) + f(\gamma_j) + \ldots + f(\gamma_s) = f(\alpha),$$

y la expresión (40) resulta igual a $mf(\alpha)$, es decir, al peso del eslabón a examinar en el poliedro A. Así pues, la suma que se encuentra en el segundo miembro de la correlación (39), es igual a la suma de los pesos de todos los eslabones del poliedro A, es decir, es igual al invariante $f(A)$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE HADWIGER. Admitamos, que los poliedros A y B son equicompuestos, y sean $M_1, M_2, \ldots, M_n$ tales poliedros, de los cuales se puede componer tanto A, como B. Todos los ángulos diedros interiores de todos los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_n$ los designaremos por $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$. De acuerdo con el lema 16 la función aditiva (14), prefijada para los números (13), se puede completar por los números $f(\gamma_1), f(\gamma_2), \ldots, f(\gamma_r)$ de forma

que obtendremos la función aditiva para los números

$$\pi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r.$$

(Esta función aditiva, como antes, satisface la condición (15)). Ya que el poliedro A se compone de los poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_n$, entonces (lema 17) el invariante $f(A)$ tiene el valor

$$f(A) = f(M_1) + f(M_2) + \ldots + f(M_n).$$

Mas el poliedro B también se compone de $M_1, M_2, \ldots, M_n$, y por esto

$$f(B) = f(M_1) + f(M_2) + \ldots + f(M_n).$$

De tal modo, $f(A) = f(B)$, lo que contradice a la correlación (16). Así, vemos que la suposición sobre la equicomposición de los poliedros A y B conduce a una contradicción.

5. POLIEDROS n-DIMENSIONALES. Para el lector que conoce la noción del espacio n-dimensional se puede añadir lo siguiente. Sea M cierto poliedro n-dimensional, mientras que L, su cara $(n-2)$-dimensional. Entonces, existen exactamente dos caras $(n-1)$-dimensionales, que lindan con la cara L del poliedro M; designemos éstas por A y B. El ángulo entre las caras A y B se llama *ángulo diedro* adyacente a la cara L. Este se mide por su *ángulo lineal*, es decir, el ángulo formado por dos perpendiculares a la cara L, una de éstas pasa por la cara A, y la otra, por la cara B.

Si $L_1, \ldots, L_k$ son todas las caras $(n-2)$-dimensionales del poliedro n-dimensional M, $l_1, \ldots, l_k$, sus volumenes $(n-2)$-dimensionales, en tanto que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, los ángulos diedros del poliedro M en estas caras, entonces, utilizando la función aditiva (11) para los números $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (véase la pág. 49), podemos determinar la suma (12), que acordamos llamar *invariante* del poliedro M. Con esta determinación del invariante el teorema de Hadwiger (pág. 49) queda válido (conjuntamente con la demostración) también para los poliedros n-dimensionales.

El teorema de Dehn se generaliza también con facilidad. La pirámide n-dimensional regular (símplex) tiene los ángulos diedros iguales a arccos $1/n$ (es fácil cerciorarse de esto por inducción con ayuda de los razonamientos que son por completo análogos a los aducidos en las págs. 51...52). De esto y del lema 15 se desprende, que *para $n \geqslant 3$ la pirámide regular y el cubo de igual volumen no son equicompuestos* (véanse los razonamientos en las págs. 53 ... 54).

§ 6. ACERCA DE LOS MÉTODOS PARA CALCULAR VOLÚMENES

1. SOBRE EL MÉTODO DE LÍMITES. Recordemos cómo actuamos para calcular las áreas de las figuras planas. Después de establecer la fórmula para el área del rectángulo, el cálculo de los áreas de otros polígonos se efectúa mediante sencillos procedimientos: método de división o método de adición. El *método de límites* se aplica en planimetría solamente para calcular las áreas de las figuras curvilíneas.

Durante el cálculo de los volúmenes de las figuras espaciales algunas veces se usa también el método de división (o de adición). Por ejemplo, para demostrar el teorema acerca de que el volumen

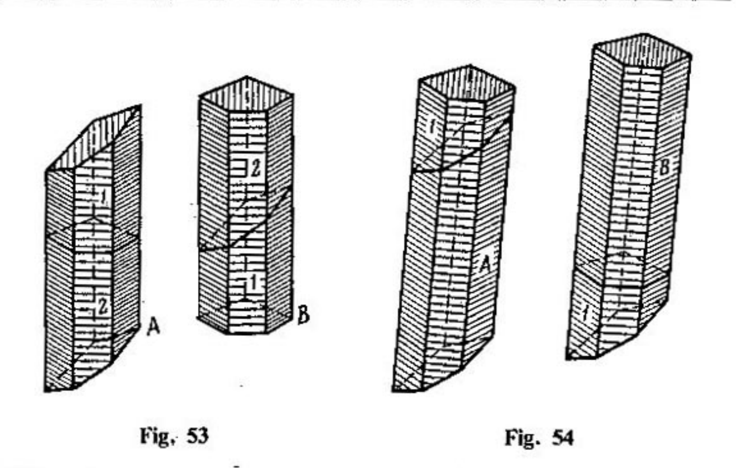


Fig. 53 Fig. 54

del prisma oblicuo es igual al producto del área de la sección perpendicular por la longitud de la arista lateral, se emplea el método de división (fig. 53) o el de adición (fig. 54). Hablando de otro modo, todo prisma oblicuo es equicompuesto (y equiadicionado) con el prisma recto, cuya arista lateral tiene también la misma longitud que la del prisma oblicuo, y su base es la sección perpendicular de dicho prisma. Dado que, a su vez, todo prisma recto es equicompuesto (y equiadicionado) con el paralelepipedo rectángulo, obtenemos tal teorema: *todo prisma oblicuo*

es equicompuesto (y equiadicionado) con el paralelepípedo rectángulo del mismo volumen. Por lo tanto, para calcular el volumen de cualquier prisma (recto u oblicuo) se puede también emplear con éxito el método de división o el de adición.

Sin embargo, al calcular el volumen de la pirámide no se usa el método de división, ni el de adición. Para este fin se utiliza el *método de límites*: se examinan cuerpos escalonados muy complicados (fig. 55) y, luego, se pasa al límite con el número creciente indefinidamente de escalones («escalera diabólica»). ¿De qué se trata? ¿Es posible, que esto se explique solamente por el hecho de que hasta la fecha los matemáticos «no tuvieron la buena suerte» de hallar la simple deducción de la fórmula del volumen de la pirámide mediante el método de división o el de adición? Resulta que esto no es así: los métodos de división y de adición, en general, son *impotentes* para establecer la fórmula

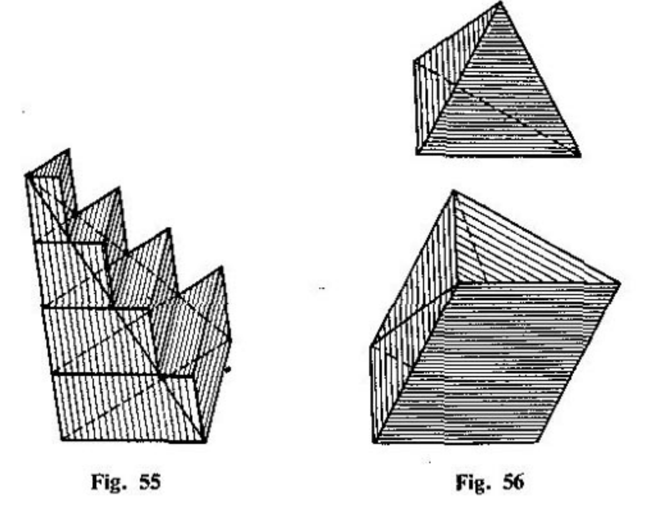


Fig. 55 **Fig. 56**

del volumen de la pirámide. Para deducir esta fórmula *es necesario* emplear un método más complicado (método de limites).

Para cerciorarse de esto, recordemos en breve cómo habitualmente se calcula el volumen de la pirámide. Sea $ABCD$ una pirámide triangular. Construyamos el prisma triangular (oblicuo) $ABCDEF$ con la base ABC y la arista lateral AD (fig. 56). Este

prisma puede ser dividido en tres pirámides triangulares $ABCD$, $BCDE$ y $CDEF$ (fig. 57), las cuales designaremos para brevedad por M_1, M_2 y M_3. Es fácil de establecer que cada dos pirámides de las M_1, M_2 y M_3 tienen iguales bases e iguales alturas. De tal manera, «queda» por demostrar, que *las dos pirámides de iguales bases e iguales alturas son equivalentes.* Precisamente esta proposición se demuestra con ayuda del método de límites. Mostremos, que con ayuda del método de división es imposible demostrar este hecho. Para ello demostraremos, que existen dos tales pirámides de iguales bases e iguales alturas, que tienen (para cierta elección de la función aditiva) *distintos* invariantes; entonces del teorema de Hadwiger se desprenderá que estas pirámides no son equicompuestas.

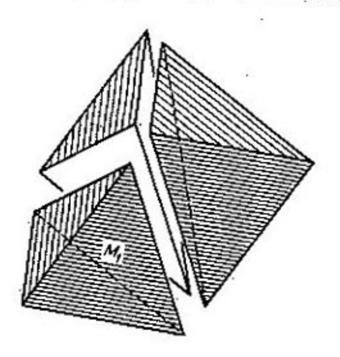


Fig. 57

Dirijamos de nuevo a las figs. 56 y 57 y supongamos, que la pirámide M_1 (es decir, la pirámide $ABCD$, con cuya ayuda fue construido el prisma $ABCDEF$) es regular. Conforme al lema 16 la función aditiva (23) puede ser extendida a la función aditiva prefijada para todos los ángulos diedros de las pirámides M_1, M_2, M_3 y del prisma $ABCDEF$. Entonces, obtendremos (lema 17) que la suma $f(M_1)+f(M_2)+f(M_3)$ es igual al invariante del prisma $ABCDEF$. Ya que este prisma es equicompuesto con el paralelepípedo rectángulo (que tiene todos sus ángulos diedros iguales a $\pi/2$), el invariante de este prisma es igual a cero.

Por lo tanto,

$$f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 0. \qquad (41)$$

Ya sabemos, que para la pirámide regular M_1 el invariante $f(M_1)$ difiere del cero. Por esta razón, las igualdades

$$f(M_1) = f(M_2) = f(M_3)$$

no pueden cumplirse (esto contradeciría a la correlación (41)). De este modo, entre las pirámides M_1, M_2 y M_3 se encontrarán dos tales, cuyos invariantes no son iguales y las cuales, por consiguiente, no son equicompuestas (en virtud del teorema de Hadwiger). Así pues, queda demostrado que existen dos pirámides de iguales bases e iguales alturas, y que no son equicompuestas.

Ahora está claro que el método de división no puede emplearse para calcular el volumen de la pirámide. ¿Y cómo va el asunto con el método de adición? Su inaplicabilidad se demuestra con la misma sencillez a base de la siguiente proposición [1].

TEOREMA. *Al cumplirse las condiciones del teorema de Hadwiger, los poliedros A y B no son equiadicionados.*

DEMOSTRACIÓN. Admitamos lo contrario: mediante ciertos poliedros M_1, M_2, $\ldots$, M_n se puede adicionar tanto A, como también B hasta el mismo poliedro C. De acuerdo con el lema 16 los números (14) pueden ser adicionados hasta la función aditiva prefijada para todos los ángulos diedros de todos los poliedros M_1, M_2, $\ldots$, M_n, C. Conforme al lema 17 obtendremos:

$$f(C) = f(A) + f(M_1) + f(M_2) + \ldots + f(M_n),$$
$$f(C) = f(B) + f(M_1) + f(M_2) + \ldots + f(M_n).$$

Pero estas igualdades contradicen a la correlación (16). Por lo tanto, los poliedros A y B no pueden ser equiadicionados.

Del teorema demostrado se infiere que la pirámide triángula regular y el cubo no solamente no son equicompuestos, sino que tampoco son equiadicionados. Tampoco son equiadicionadas las dos pirámides de iguales bases e iguales alturas, y cuyos invariantes no coinciden. Dado que la existencia de dos tales pirámides fue demostrada anteriormente, está claro, que el método de adición también es inaplicable para calcular el volumen de la pirámide.

[1] La inaplicabilidad del método de adición se deriva también del *teorema*, más general, *de Sydler*, que se demuestra a continuación.

2. EQUIVALENCIA DE LOS METODOS DE DIVISIÓN Y DE ADICIÓN. En el capítulo anterior hemos visto, que la equicomposición significa para los poliedros planos lo mismo que la equiadición, es decir, los métodos de división y de adición en este caso son equivalentes. La demostración de este hecho, aducida en el capítulo anterior, sustancialmente se basaba en el teorema de Bolyai–Gerwien acerca de la equicomposición de cualesquiera dos polígonos equivalentes. Ya sabemos, que para los poliedros de la igualdad de los volúmenes no se desprende la equicomposición, ni la equiadición de los poliedros examinados. Por esto, mediante razonamientos, semejantes a los que fueron aducidos en el capítulo anterior, es imposible establecer si son equivalentes los métodos de división y de adición para los poliedros. A la cuestión sobre la equivalencia de estos métodos contesta afirmativamente el teorema siguiente.

TEOREMA DE SYDLER. *Dos poliedros son equiadicionados, cuando y sólo cuando éstos son equicompuestos.*

Pasemos a la demostración de este teorema.

LEMA 18. *Si los poliedros A y B son equicompuestos, éstos son equiadicionados.*

Efectivamente, sean M_1, M_2, ..., M_k tales poliedros, de los cuales se puede componer tanto A, como B. Seguidamente, sea M un poliedro que contiene dentro las figuras A y B, mientras que M_0, una parte del poliedro M no ocupada por las figuras A y B. Es fácil de ver que con las figuras M_0, M_1, M_2, ..., M_k se puede adicionar tanto A, como B hasta el mismo poliedro M. En efecto, al llenar el poliedro A con las figuras M_1, M_2, ..., M_k, hallaremos que las figuras M_0, M_1, M_2, ..., M_k ocupan todo el poliedro M, salvo el poliedro B, es decir, estas figuras adicionan B hasta el poliedro M. Pero, al llenar el poliedro B con las figuras M_1, M_2, ..., M_k, hallaremos que se puede adicionar A hasta el poliedro M con las figuras M_0, M_1, M_2, ..., M_k. Por lo tanto, A y B son equiadicionados.

Indiquemos, que la figura M_0 es el poliedro M, dentro del cual hay dos «vacíos» en forma de los poliedros A y B. Si el lector no se siente propenso a considerar tal figura como un «poliedro», entonces, para concluir la demostración se tiene que «cortar» la figura M_0 en varios poliedros que no tengan dentro «vacíos». (Es suficiente trazar un plano que interseca ambos poliedros A y B; éste cortará la figura M_0 en partes que no contienen «vacíos»).

LEMA 19. *Cualesquiera dos prismas equivalentes son equicompuestos.*

Notemos, ante todo, que si las bases de dos prismas tienen iguales áreas y están dispuestas en planos paralelos, mientras que las generatrices de estos prismas son iguales y paralelas (fig. 58), tales prismas son

equicompuestos (ya que según el teorema de Bolyai – Gerwien sus bases son equicompuestas).

De esta nota se desprende que todo prisma es equicompuesto con cierto paralelepípedo (hablando en general, oblicuo).

A continuación, cualquier paralelepípedo oblicuo es equicompuesto con el recto. Efectivamente, sea p el plano de la base del paralelepípedo oblicuo P, A, un punto de este plano, AB, un segmento que es igual y paralelo a la arista lateral del paralelepípedo P. Sea luego l la proyección de la recta AB en el plano p, en tanto que m, una recta trazada en el plano p perpendicularmente a l y que pasa a través del punto A (fig. 59). Elijamos en las rectas l y m tales puntos C y D, que el rectángulo de lados AC y AD será equivalente a la base del paralelepípedo P, y en este rectángulo, como en una base, construyamos

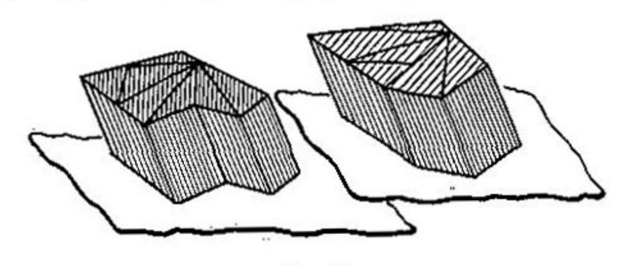


Fig. 58

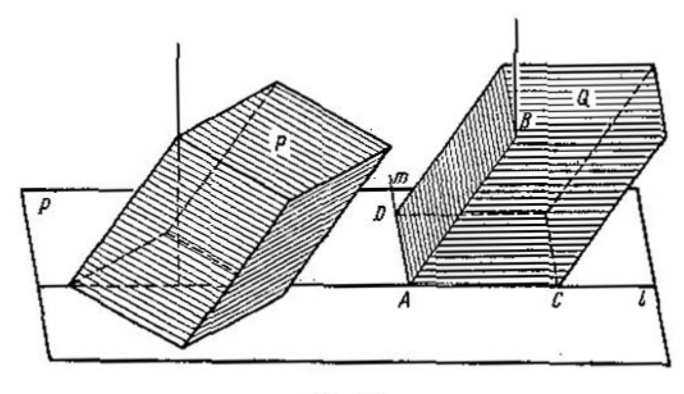


Fig. 59

el paralelepípedo Q con la arista lateral AB. Entonces, los paralelepípedos P y Q son equicompuestos (en virtud de la nota hecha anteriormente). Al tomar ahora el paralelogramo de lados AB y AC por la base del paralelepípedo Q, y AD, por su arista lateral, veremos que el paralelepípedo Q es recto ($AD \perp AB$, $AD \perp AC$).

Sea K un cubo equivalente al paralelepípedo Q, y a, la longitud de su arista. Al sustituir la base del paralelepípedo Q por un rectángulo equivalente de lado a, recibiremos un paralelepípedo *rectangular*, una arista del cual es igual a a, equicompuesto con Q. Al tomar esta arista del paralelepípedo rectángulo por la altura y, sustituyendo su base por el cuadrado equivalente, obtendremos el cubo K.

Así pues, todo prisma es equicompuesto con el cubo equivalente con éste, y, por esta razón, dos prismas equivalentes son equicompuestos entre sí.

Antes de pasar a la enunciación de los lemas siguientes, tomemos algunas designaciones. Sean A y B dos poliedros que no tienen puntos interiores comunes. Por $A+B$ designaremos una parte del espacio (poliedro), ocupada por los poliedros A y B. De modo semejante se determina también la «suma» de varios poliedros. En particular, si el poliedro A está dividido en los poliedros que lo componen $M_1, M_2, \ldots, M_k$, entonces escribiremos: $A = M_1 + M_2 + \ldots + M_k$. A continuación, si están dados n poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_n$, cada uno de los cuales es igual al poliedro M, entonces en lugar de la suma $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ también escribiremos nM. El poliedro semejante al poliedro M con la razón de semejanza λ, lo designaremos por $M^{(\lambda)}$. Finalmente, por el signo $\backsim$ acordemos designar la equicomposición de los poliedros: la inscripción $A \backsim B$ significará que los poliedros A y B son equicompuestos.

LEMA 20. *Sean $P_1, P_2, \ldots, P_k$ los prismas que no tienen puntos interiores comunes, en tanto que P, es un prisma equivalente a su suma. Entonces, $P_1 + P_2 + \ldots + P_k \backsim P$.*

Para la demostración sustituyamos los prismas $P_1, P_2, \ldots, P_k$ por los paralelepípedos rectangulares $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ equivalentes a éstos y de

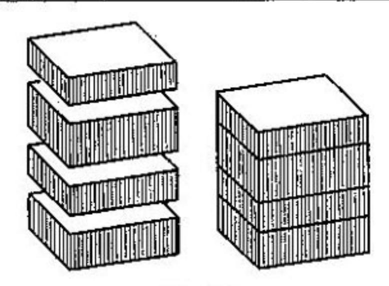


Fig. 60

iguales bases, y, después, los componemos en forma de una «pila», poniéndolos uno sobre el otro por las bases iguales (fig. 60). En consecuencia obtendremos el paralelepípedo Π equivalente, evidentemente, al prisma P de manera que (véase el lema 19)

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k \sim \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_k \sim \Pi \sim P.$$

LEMA 21. *Sea M un poliedro arbitrario, mientras que n, un número natural. Entonces, $M^{(n)} \sim P + nM$, donde P, es cierto prisma.*

Demostremos este lema, suponiendo inicialmente que M es una pirámide triangular. En este caso $M^{(n)}$ también es una pirámide triangular, además, su altura es n veces mayor que la altura de la pirámide M. Dividamos la altura de la pirámide $M^{(n)}$ en n partes iguales y a través de los puntos de división tracemos planos paralelos a la base. En este caso la pirámide $M^{(n)}$ se dividirá en n «capas», la superior de las cuales es una pirámide igual a M (fig. 61). Examinemos cualquier capa diferente de la superior. Este será una pirámide truncada; sus bases inferior

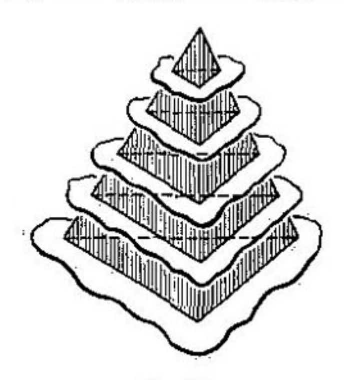


Fig. 61

y superior las designaremos por ABC y $A_1B_1C_1$. Tracemos a través del lado A_1B_1 de la base superior un plano paralelo a la arista CC_1 (fig. 62). Dicho plano cortará la base inferior por el segmento A_2B_2, dividiendo la pirámide truncada en dos partes: el prisma $A_2B_2CA_1B_1C_1$ y el poliedro $AA_1A_2BB_1B_2$. Ahora tracemos a través de la arista A_1A_2 un plano paralelo a la cara BB_1B_2 del último poliedro. Con ello, éste se dividirá en dos partes: el prisma $A_1A_2A_3B_1B_2B$ y la pirámide $AA_1A_2A_3$ igual, lo que es fácil de ver, a la pirámide M (ya que ésta es semejante a la pirámide M y tiene la misma altura). Pues bien, cada capa, salvo la superior, se puede dividir en una pirámide, que es igual a M, y en dos prismas. Toda la pirámide $M^{(n)}$ está compuesta de n pirámides, que son

iguales a M, y de una serie de prismas. Estos pueden ser sustituidos, en virtud del lema 20, por un prisma P, y obtendremos:

$$M^{(n)} \sim P + nM,$$

es decir, en el caso, si M es una pirámide triangular, el lema es válido.

Ahora sea M un poliedro arbitrario. Si éste es no convexo, entonces, al trazar todos los planos, en los cuales yacen sus caras, lo partiremos en número finito de poliedros convexos. Luego, cada poliedro convexo puede ser dividido en pirámides (poligonales): para esto es suficiente, tomando dentro del poliedro el punto O, examinar todas las pirámides que tienen el punto O como su vértice común, en tanto que las caras del poliedro, sus bases (fig. 63). Por último, cada pirámide polígona puede ser dividida en varias pirámides triangulares (fig. 64). De este modo, todo poliedro puede ser dividido en un número finito de pirámides triangulares. Sea que

$$M = T_1 + T_2 + \ldots + T_k \tag{42}$$

la división del poliedro M en pirámides triangulares. Al aumentar todas

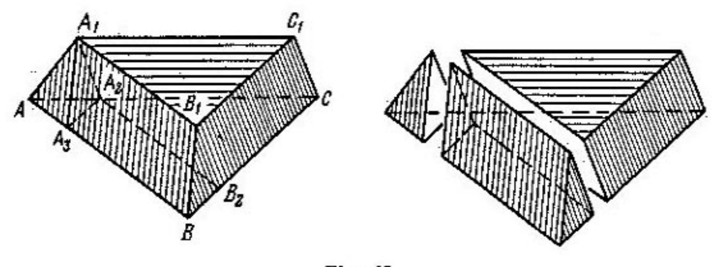


Fig. 62

estas figuras semejantemente n veces, obtendremos:

$$M^{(n)} = T_1^{(n)} + T_2^{(n)} + \ldots + T_k^{(n)}.$$

De acuerdo con lo demostrado anteriormente, tenemos:

$$T_1^{(n)} \sim P_1 + nT_1, \quad T_2^{(n)} \sim P_2 + nT_2, \quad \ldots, \quad T_k^{(n)} \sim P_k + nT_k,$$

donde $P_1, P_2, \ldots, P_k$ son ciertos prismas. Por lo tanto,

$$M^{(n)} \sim (P_1 + P_2 + \ldots + P_k) + (nT_1 + nT_2 + \ldots + nT_k) \sim P + nM;$$

aquí la suma de los prismas $P_1 + P_2 + \ldots + P_k$ está sustituida por un

prisma (lema 20), mientras que de las pirámides $T_1, T_2, \ldots, T_k$, cada una de las cuales se toma en n ejemplares, se compone, en virtud de (42), n ejemplares del poliedro M. El lema queda demostrado.

LEMA 22. *Si dos poliedros son equiadicionados, éstos son equicompuestos.*

Durante la demostración, el volumen de cierto poliedro M lo designaremos por $V(M)$. Sean A y B poliedros equiadicionados. Entonces, existen dos poliedros C y D, que son equicompuestos entre sí y que adicionan A y B hasta una misma figura:

$$A + C = B + D, \quad C \sim D. \tag{43}$$

Sea C_1 un cubo, en el interior del cual se puede colocar el poliedro C, mientras que n, un número entero, mayor que $\sqrt{1 + \frac{V(C_1)}{V(A)}}$. Entonces, $n^2 > 1 + \frac{V(C_1)}{V(A)}$ o $n^2 V(A) > V(A) + V(C_1)$. Multiplicando ambos miembros de esta proporción por n, y, señalando que $n^3 V(A)$ es el volumen

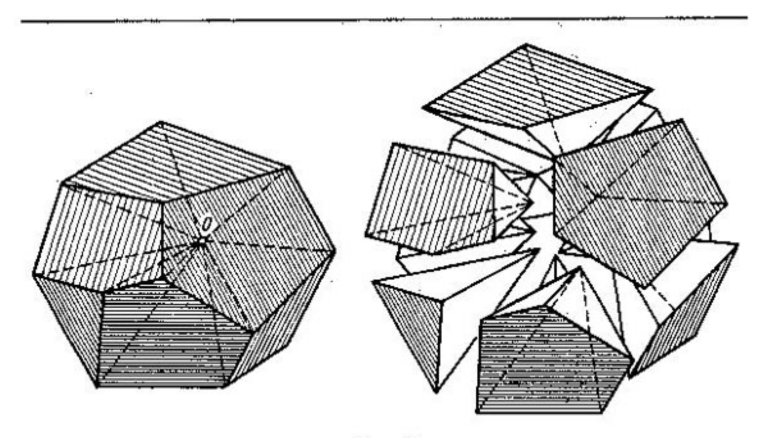


Fig. 63

del poliedro $A^{(n)}$, podemos escribir:

$$V(A^{(n)}) > nV(A) + nV(C_1). \tag{44}$$

Además, de acuerdo con el lema 21, podemos escribir:

$$A^{(n)} \sim P + nA, \quad B^{(n)} \sim Q + nB, \tag{45}$$

donde P y Q son ciertos prismas; la primera de estas proporciones nos da $V(A^{(n)}) = V(P) + nV(A)$. De esta igualdad y de (44) se infiere que

$V(P) > nV(C_1)$, es decir, el volumen del prisma P es por lo menos n veces mayor que el volumen del cubo C_1. Con ello, de acuerdo con el lema 20, podemos considerar que P es un paralelepípedo rectangular con la misma base que el cubo C_1. Entonces, la altura del paralelepípedo P es por lo menos n veces mayor que la altura del cubo C_1, de forma que en el interior de P se puede colocar n cubos iguales a C_1, y tanto más en el interior de P se puede disponer n poliedros iguales a C. Así pues, ubiquemos dentro de P la figura nC; la parte restante del paralelepípedo P (no ocupada por la figura nC) la designaremos por T:

$$P = T + nC. \tag{46}$$

A continuación, los prismas P y Q son equivalentes (ya que $V(A) = V(B)$,

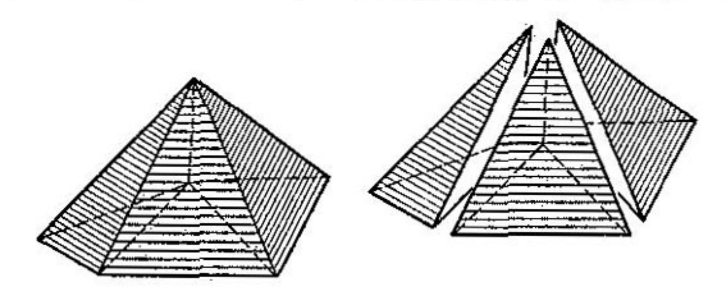


Fig. 64

$V(A^{(n)}) = V(B^{(n)})$, y por esta razón, en virtud de (45), tenemos que $V(P) = V(Q)$) y, por consiguiente, son equicompuestos (lema 19)):

$$P \sim Q. \tag{47}$$

Comparando las correlaciones (43) y (45)...(47), hallamos:

$$A^{(n)} \sim P + nA = T + nC + nA = T + n(A + C) \sim T + n(B + D) =$$
$$= T + nB + nD \sim T + nB + nC =$$
$$= (T + nC) + nB \sim P + nB \sim Q + nB \sim B^{(n)}.$$

De este modo, los poliedros $A^{(n)}$ y $B^{(n)}$ son equicompuestos, es decir, se pueden dividir en partes iguales respectivamente. Al disminuir de modo semejante n veces los poliedros $A^{(n)}$ y $B^{(n)}$, así como las partes, en las cuales éstos están divididos, hallaremos que los poliedros A y B también son equicompuestos. El lema queda demostrado.

Queda por indicar, que el teorema de Sydler, enunciado anteriormente, se desprende directamente de los lemas 18 y 22.

COMPLEMENTOS

1. CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE DE EQUICOMPOSICIÓN DE LOS POLIEDROS. Aduzcamos (sin demostraciones) la condición de equicomposición dada en una de las obras de Hadwiger. Supongamos, que a cada poliedro A se ha puesto correspondientemente cierto número $\chi(A)$, además han sido cumplidas las siguientes condiciones:

1) a los poliedros iguales A y B corresponden los números iguales $\chi(A) = \chi(B)$ (condición de invariación);

2) si el poliedro A está dividido en varios poliedros $M_1, M_2, \ldots, M_k$, tiene lugar la igualdad

$$\chi(A) = \chi(M_1) + \chi(M_2) + \ldots + \chi(M_k)$$

(condición de aditividad);

3) si $A^{(\lambda)}$ es un poliedro semejante al poliedro A con la razón de semejanza λ, entonces $\chi(A^{(\lambda)} = \lambda \cdot \chi(A)$ (condición de linealidad).

Con estas condiciones se dice que está prefijado el *invariante aditivo lineal* χ. Tiene lugar el seguiente

TEOREMA. *Para la equicomposición de los poliedros A y B es necesaria y suficiente que sus volumenes sean iguales y, además, que para todo invariante aditivo lineal χ sea cumplida la igualdad $\chi(A) = \chi(B)$.*

Hablando de otro modo, si los poliedros equivalentes A y B no son equicompuestos, existe tal invariante aditivo lineal χ, para el cual $\chi(A) \neq \chi(B)$. Indíquemos, que en virtud del teorema de Sydler demostrado anteriormente, esta condición también es necesaria y suficiente para la equiadición de los poliedros A y B.

Es interesante comparar esta condición con la enunciación del teorema de Hadwiger que fue demostrado anteriormente (pág. 49). En aquel caso también fue construido cierto *invariante* $f(A)$. A los poliedros iguales A y B correspondieron valores iguales del invariante: $f(A) = f(B)$. Este invariante fue *aditivo* (lema 17). Este también fue *lineal* (ya que todas las aristas del poliedro $A^{(\lambda)}$ son λ veces mayores que las aristas del poliedro A, mientras que sus ángulos diedros, iguales, de forma que de la definición del invariante f en la pág. 49 se desprende la igualdad $f(A^{(\lambda)} = \lambda \cdot f(A))$. Sin embargo, el invariante f, de cualquier modo, difiere de los invariantes, sobre los cuales se habla en el teorema enunciado anteriomente: el invariante f no está determinado para *todos* los poliedros. Este fue determinado solamente para *dos* poliedros, sobre los cuales se trataba en el teorema de Hadwiger, pero cuando encontramos nuevos poliedros (en el lema 17), adicionalmente determinamos el valor del invariante f para éstos.

Es menester señalar que la existencia de los invariantes aditivos lineales, determinados a la vez para *todos* los poliedros, se demuestra

en esencia de forma *no elemental*. Para construir tales invariantes [1] (así como también para la demostración del teorema formulado en este apartado) se emplea la llamada *inducción transfinita*, la noción de la cual sobrepasa mucho los límites de este pequeño libro.

2. G-EQUICOMPOSICIÓN DE LOS POLIEDROS. Análogamente al caso de los polígonos se puede hablar de la *G-equicomposición* de los poliedros, donde G es cierto grupo de movimientos (se sobreentiende, aquí se tienen en cuenta los movimientos de las figuras *espaciales*, en particular, los poliedros). Designemos por T el grupo que consta de todas las traslaciones paralelas (en el espacio). En este caso se puede hablar de si serán o no los dos poliedros prefijados T-equicompuestos. Notemos el siguiente interesante teorema, que también pertenece a Hadwiger.

TEOREMA. *Al objeto de que el poliedro convexo sea T-equicompuesto con el cubo, es necesario y suficiente que cada una de sus caras sea un poliedro de simetría central* [2].

De aquí se deriva que dos poliedros equivalentes, cada uno de los cuales tiene caras de simetría central, son T-equicompuestos entre sí. En particular, si hay dos poliedros *iguales* con caras de simetría central, entonces, como quiera que sean éstos girados uno con respecto al otro, siempre serán T-equicompuestos.

A la par con los poliedros G-equicompuestos se puede examinar los poliedros *G-equiadicionados* (G es el grupo de movimientos). Si el grupo G contiene todas las traslaciones paralelas (éste puede, salvo las traslaciones, también contener otros movimientos), los *dos poliedros son G-equiadicionados, cuando y sólo cuando éstos son G-equicompuestos*. La demostración de este teorema (que es válido también en el espacio n-dimensional) se alcanza sólo por medio de la complicación insignificante de la demostración del teorema de Sydler, que ya se había aducido antes.

---

[1] Existe solamente un invariante, cuya construcción es elemental: éste es el invariante igual a cero para *cada* poliedro A. Sin embargo, el examen de este invariante no tiene contenido.

[2] De las obras del geómetra soviético A. D. Alexándrov se infiere, que el poliedro que posee esta propiedad, es de simetría central.

A NUESTROS LECTORES:

Goloviná L., Yaglom I.

INDUCCIÓN EN LA GEOMETRÍA

Este libro, dirigido a los alumnos de grados superiores, profesores de matemáticas y estudiantes de las facultades de física y matemática de los institutos de pedagogía, tiene puntos de contacto con el libro "Método de inducción matemática" de I. Sominski (Editorial Mir, 1974) y puede ser considerado como su continuación; será de interés especial para los que conocen ya el libro de I. Sominski.

Contiene 37 ejemplos seguidos de la solución detallada y 40 problemas acompañados de breves indicaciones. Está dedicado a diversas aplicaciones del método de inducción matemática para la solución de problemas geométricos. A nuestro parecer, lo más importante en él son los distintos aspectos del método de inducción matemática; algunos (no todos, por supuesto) ejemplos y problemas pueden también representar interés por sí mismos.

El texto puede utilizarse en el trabajo del círculo matemático de la escuela secundaria, así como en forma autodidacta.

Markushévich A.

AREAS Y LOGARITMOS

Este trabajo del Doctor en Ciencias Físicomatemáticas, A. Markushévich, fue enunciado primeramente en la Universidad de Moscú ante los alumnos de grados superiores de las escuelas secundarias.

En la obra se expone la teoría geométrica de los logaritmos en la que los últimos aparecen como ciertas áreas. Las propiedades de logaritmos se obtienen del análisis de las propiedades respectivas de las áreas. Junto con esto el libro proporciona las más simples nociones y propiedades del cálculo integral.

No es forzosamente necesario que el lector sepa qué es un logaritmo. No obstante, el lector debe tener conocimientos primarios sobre las funciones y su representación gráfica, progresión geométrica y el límite.

En el caso en que el lector desee obtener la mayor información sobre los logaritmos podría referirse a la obra "Series" del mismo autor.

El libro será útil como libro de lectura para escolares y aquellos lectores que estén interesados por los problemas que en el mismo se exponen.

Markushévich A.

SUCESIONES RECURRENTES

El concepto de sucesión recurrente es una amplia generalización del concepto de progresión aritmética o geométrica. También comprende como casos particulares las sucesiones de cuadrados o cubos de los números naturales, las sucesiones de las cifras de la descomposición decimal de los números racionales (y, en general, todas las sucesiones periódicas), las sucesiones de los coeficientes del cociente que se obtiene al dividir dos polinomios cualesquiera escritos en el orden creciente de las potencias de x, etc. Por lo tanto, ya en el curso escolar de las Matemáticas se puede tropezar muy frecuentemente con las sucesiones recurrentes. La teoría de estas sucesiones es un capítulo de la disciplina matemática llamada "Cálculo de diferencias finitas". En presente librito se expone esta teoría de manera que no exija del lector conocimientos especiales previos (sólo una vez el autor se refiere, sin demostrarla, a una proposición general de la teoría de las ecuaciones algebraicas lineales).

Está destinada a los alumnos de los grados superiores de la escuela secundaria así como a todos los que se interesan por las Matemáticas.

Boltianski V.

¿QUÉ ES EL CÁLCULO DIFERENCIAL?

El propósito del autor es explicar (de forma comprensible para los alumnos que cursan los últimos años de la enseñanza media) ciertos conceptos de las matemáticas superiores, como son los de derivada, ecuación diferencial, número *e*, logaritmo natural (lo corriente es que los alumnos se enteren de estos dos últimos conceptos y se interesen por ellos). El autor ha procurado que las explicaciones de estos conceptos sean lo más claras posibles, basándose para ello en la resolución de problemas tomados de la física. Al proceder así además del deseo de lograr la claridad antedicha, le ha guiado el de mostrar que los conceptos de las matemáticas "superiores" son el reflejo matemático de las propiedades de procesos reales que ocurren en la naturaleza y demostrar una vez más que las matemáticas están ligadas a la vida, y no al margen de ella, que se desarrollan, y no son una ciencia acabada e invariable. No todas las demostraciones y razonamientos contenidos en el libro se hacen con absoluta rigurosidad matemática. Algunos de estos razonamientos tienen carácter de aclaraciones.

Esta obrita puede utilizarse en el trabajo de los círculos matemáticos y físicos de las escuelas e institutos de segunda enseñanza: para su comprensión bastan los conocimientos que se adquieren en los primeros nueve cursos de las escuelas de enseñanza media.

Lecciones populares de matemáticas

En el año 1981 «Mir» pablicara

Golovíná I., Yaglom I.

«Inducción en la geometría»

Markushévich A.

«Areas y logaritmos»

Markushévich A.

«Sucesiones recurrentes»

Smogorzhevski A.

«El uso de la regla en las construcciones geométricas»

Editorial MIR



Moscú